Oppgave 2. La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V. Vis at hvis f har $\dim V$ distinkte egenverdier, så er f diagonaliserbar.

Skriv $n = \dim V$ og anta at $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er distinkte egenverdier for f. For hver i, la $\bar{v}_i \in V$ være en egenvektor tilhørende λ_i.

Nå sier vår PROPOSISJON fra FORELESNING E11 at

$$\beta = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$$

er lineært uavhengig. Men da er jo β en (ordna) basis for V (hvorfor?) som består av egenvektorer for f. Så i følge vår PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON) fra FORELESNING V13 er f diagonaliserbar.

Oppgave 3. Avgjør om matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

er diagonaliserbar (du trenger ikke å diagonalisere A, selv om det skulle være mulig).

Vi ser med en gang at matrisa A har tre distinkte egenverdier (hva er disse egenverdiene og hvorfor kan vi lese dem rett av fra A?).

Siden A er en 3×3-matrise (og dermed representerer en operator på et tredimensjonalt vektorrom), følger det fra S13.2 at A er diagonaliserbar.

Oppgave 7. Avgjør om derivasjonsoperatoren D på vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, altså

$$D(p) = p' \text{ for hvert polynom } p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$

er diagonaliserbar.

Mhp. den ordna basisen $\beta = \{1, x, x^2\}$ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi:

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Regn ut dette selv!)

Så $\text{charpol}_D = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^3$, som betyr at 0 er den eneste egenverdien for D og at $m_0 = 3$.

Den "algebraiske multiplisiteten" til egenverdien 0

Vi vet (OPPSUMMERING fra FORELESNING V13) at da er D diagonaliserbar hvis og bare hvis

$$\underbrace{\dim E_0}_{\text{Den "geometriske multiplisiteten" til egenverdien } 0.} = 3.$$

Oppgave 7. Avgjør om derivasjonsoperatoren D på vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, altså

$$D(p) = p' \text{ for hvert polynom } p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$

er diagonaliserbar.

Nå hjelper det å huske at for enhver linear operator $f: V \to V$ med egenverdi λ, er $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$ (se MERK fra FORELESNING V13). Spesielt blir her

$$\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker}(D - 0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}) = \dim \operatorname{Ker} D.$$

Men det er klart at

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{span}(1) \quad \left(= \{\text{konstante polynomer}\} = \mathbb{R}[x]_{\leq 0}\right),$$

altså er

$$\dim \operatorname{Ker} D = 1.$$

Altså, $m_0 = 3 \neq 1 = \dim E_0$, så D er ikke diagonaliserbar.