Oppgave 3. La

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bruk Cayley–Hamilton-teoremet til å regne ut og forenkle uttrykket

$$-B^3 + 4B^2 + 3B - 4I_{3\times 3}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Skriv $s(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 4$. Oppgaven ber oss altså om å finne matrisa $s(B)$.

Det karakteristiske polynomet til B er

$$p(x) = (1-x)(1-x)(2-x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2.$$

Merk at

$$s(x) = p(x) + 8x - 6.$$

Dermed blir

$$s(B) = \underbrace{p(B)}_{=0 \text{ ved CAYLEY–HAMILTON}} + 8B - 6I$$

$$= 8B - 6I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 16 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Oppgave ~~1~~ 2. Bruk Cayley–Hamilton-teoremet til å finne inversen til matrisa

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Skriv $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Da blir

$$\mathrm{charpol}_A = \det(A - x \cdot I_{3\times3}) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3.$$

Cayley–Hamilton-teoremet sier da at

$$0 = -A^3 + 5 \cdot A^2 - 7 \cdot A + 3 \cdot I_{3\times3}.$$

Det følger at

$$3 \cdot I_{3\times3} = A^3 - 5 \cdot A^2 + 7 \cdot A = A(A^2 - 5A + 7 \cdot I_{3\times3})$$

Altså er

$$I_{3\times3} = A \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (A^2 - 5A + 7 \cdot I_{3\times3})\right),$$

så inversen til matrisa A er

$$\frac{1}{3} \cdot (A^2 - 5A + 7 \cdot I_{3\times3}) = \quad \dots \quad = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}}}.$$

Enkel regning

Oppgave 6. Vi lar C^∞ være vektorrommet av alle funksjoner $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ som er slik at den deriverte $\phi^{(n)}$ eksisterer og er kontinuerlig for hver $n \geq 0$. For hver $r \in \mathbb{R}$, la $\phi_r\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $\phi_r(x) = re^x$ og skriv

$$W = \{\phi_r \mid r \in \mathbb{R}\} \subset C^\infty.$$

(a) Vis at W er et underrom av C^∞.

(b) Hva er dimensjonen til vektorrommet W?

La $D\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$ være den lineære operatoren gitt ved derivasjon.

(c) Vis at W er D-invariant.

(d) Hva er operatoren $D|_W$ bedre kjent som?

a) Vi bruker PROPOSISJON I fra FORELESNING V2:

i) W inneholder nullvektoren i C^∞ (det vil si nullfunksjonen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$), nemlig ϕ_0. ✓

$(\phi_0(x) = 0 \cdot e^x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R})$

ii) Hvis $\phi_r, \phi_s \in W$, så er $\phi_r + \phi_s = \phi_{r+s} \in W$ ✓

$\big((\phi_r + \phi_s)(x) = \phi_r(x) + \phi_s(x)$

$= re^x + se^x = (r+s)e^x = \phi_{r+s}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.\big)$

iii) Hvis $\lambda \in \mathbb{R}$, så er $\lambda \cdot \phi_r = \phi_{\lambda r} \in W$. ✓

$\big((\lambda \cdot \phi_r)(x) = \lambda \cdot \phi_r(x) = \lambda \cdot r e^x$

$= \lambda r \cdot e^x = \phi_{\lambda r}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.\big)$

Oppgave 6. Vi lar C^∞ være vektorrommet av alle funksjoner $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ som er slik at den deriverte $\phi^{(n)}$ eksisterer og er kontinuerlig for hver $n \geq 0$. For hver $r \in \mathbb{R}$, la $\phi_r\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $\phi_r(x) = re^x$ og skriv

$$W = \{\phi_r \mid r \in \mathbb{R}\} \subset C^\infty.$$

(a) Vis at W er et underrom av C^∞.

(b) Hva er dimensjonen til vektorrommet W?

La $D\colon C^\infty \longrightarrow C^\infty$ være den lineære operatoren gitt ved derivasjon.

(c) Vis at W er D-invariant.

(d) Hva er operatoren $D|_W$ bedre kjent som?

b) Det er klart at $W = \operatorname{span}(\phi_1)$, så $\{\phi_1\}$ er en basis for W (hvorfor er $\{\phi_1\}$ lineært uavhengig?), så $\underline{\underline{\dim W = 1}}$

c) For hver $\phi_r \in W$ er $D(\phi_r) = \phi_r \in W$, så W er D-invariant.

d) $D|_W$ er lik identitetsoperatoren på W.