Oppgave 3. Se på den lineære operatoren $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n).$$

(a) Finn egenverdiene til f.

(b) For hver av egenverdiene til f, finn en tilhørende egenvektor.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n) \end{cases}$$

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi for f hvis og bare hvis det finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ slik at

$$(x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n) = f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n)$$

Vi ser(*) at $\lambda = 1$ er én mulighet (da må $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, men x_1 kan velges fritt).

Vi ser(*) også at $\lambda = 2$ er en mulighet (da kan x_2 velges fritt, men vi må ha $x_1 = 0 = x_3 = x_4 = \ldots = x_n$).

Oppgave 3. Se på den lineære operatoren $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n).$$

(a) Finn egenverdiene til f.

(b) For hver av egenverdiene til f, finn en tilhørende egenvektor.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n) \end{cases}$$

a) Faktisk ser (*) vi at hvert heltall $\lambda \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ er en egenverdi for f (fordi:

$$f(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, kx, 0, \ldots, 0)$$

Posisjon k

$$= k(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)$$

for hver $x \in \mathbb{R}$).

I følge lista med EGENSKAPER i FORELESNING V11 har f høyst $\dim \mathbb{R}^n = n$ egenverdier. Altså er f sine egenverdier nøyaktig $\underline{\underline{1, 2, 3, \ldots, n}}$.

Oppgave 3. Se på den lineære operatoren $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n).$$

(a) Finn egenverdiene til f.

(b) For hver av egenverdiene til f, finn en tilhørende egenvektor.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n) \end{cases}$$

a) (*): Den som ikke er så komfortabel med "å se" på denne måten, kan bruke en enda mer oppskriftsmessig metode:

- Observér at $f = L_B$ for $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ (altså at $f(\bar{v}) = B \cdot \bar{v} \quad \forall \ \bar{v} \in \mathbb{R}^n$).

- Regn ut
$$\text{charpol}_B = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(n-\lambda).$$

- Konkludér med at f sine egenverdier er $1, 2, \ldots, n$.

Oppgave 3. Se på den lineære operatoren $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n).$$

(a) Finn egenverdiene til f.

(b) For hver av egenverdiene til f, finn en tilhørende egenvektor.

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n) \end{cases}$$

b) Vi fant jo egentlig egenvektorene over, da vi lette etter egenverdiene:

Posisjon k

Hver vektor på formen $(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ med $x \neq 0$ er en egenvektor tilhørende egenverdien k.

NB! Den "alternative" løsningen av a) (altså den som baserte seg på matrisa B), sier ikke like umiddelbart noe om de tilhørende egenvektorene.

Oppgave 5. Vis at distinkte egenverdier har distinkte egenvektorer.

Det vil si, la f være en lineær operator på et reelt vektorrom V og la $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ være egenverdier for f med respektive egenvektorer $\bar{v}_\lambda, \bar{v}_\mu \in V$. Vis at

$$\lambda \neq \mu \implies \bar{v}_\lambda \neq \bar{v}_\mu.$$

NB! Dette følger selvsagt fra vår Proposisjon fra forelesning E11, men i denne oppgaven er det *ikke* meningen at du skal referere til det resultatet.

La $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ være egenverdier for f med tilhørende egenvektorer $\bar{v}_\lambda, \bar{v}_\mu \in V$, henholdsvis.

Skal vise: $\lambda \neq \mu \Rightarrow \bar{v}_\lambda \neq \bar{v}_\mu$.

Ekvivalent: $\bar{v}_\lambda = \bar{v}_\mu \Rightarrow \lambda = \mu$.

Så anta at $\bar{v}_\lambda = \bar{v}_\mu$. Da er $\bar{v}_\lambda \neq \bar{0}$ (definisjon av egenvektor), så delmengden $\{\bar{v}_\lambda\} \subset V$ er lineært uavhengig (hvorfor?). Men antagelsen medfører

$$f(\bar{v}_\lambda) = \lambda \bar{v}_\lambda = \mu \bar{v}_\lambda, \quad \text{så} \quad (\lambda - \mu)\bar{v}_\lambda \overset{(*)}{=} \bar{0}.$$

Siden $\{\bar{v}_\lambda\}$ er lineært uavhengig, impliserer $(*)$ at $\lambda - \mu = 0$, altså $\lambda = \mu$.