Oppgave 2. Husk at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{R}$-vektorrommet som består av *alle* funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Nå lar vi $\beta = \{\cos x, \sin x\}$ og ser på underrommet

$$V = \operatorname{span}(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Merk at β er en basis for V.

a) Vis at også $\beta' = \{2\sin x + \cos x, 3\cos x\}$ er en basis for V.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$, fra β' til β.

c) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

La $h = 2\sin x - 5\cos x \in V$.

d) Finn koordinatvektoren $[h]_\beta$.

e) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta'}$ på to måter.

Oppgave 2. Husk at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{R}$-vektorrommet som består av *alle* funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Nå lar vi $\beta = \{\cos x, \sin x\}$ og ser på underrommet

$$V = \operatorname{span}(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Merk at β er en basis for V.

a) Vis at også $\beta' = \{2\sin x + \cos x, 3\cos x\}$ er en basis for V.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β.

c) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

La $h = 2\sin x - 5\cos x \in V$.

d) Finn koordinatvektoren $[h]_\beta$.

e) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta'}$ på to måter.

La oss skrive

- $f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$ og
- $g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$.

a) Det er for det første klart at $\beta' \subset V = \operatorname{span}(\beta)$.

Videre er det klart at β' er lineært uavhengig (g_1 er ikke et skalarmultiplum av g_2; bruk S3.8).
Siden β' har 2 elementer og $\dim V = 2$ (fordi: β er en basis), følger det fra PROPOSISJON II i) fra FORELESNING V4 at β' er en basis for V.

Oppgave 2. Husk at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{R}$-vektorrommet som består av *alle* funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Nå lar vi $\beta = \{\cos x, \sin x\}$ og ser på underrommet

$$V = \operatorname{span}(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Merk at β er en basis for V.

a) Vis at også $\beta' = \{2\sin x + \cos x, 3\cos x\}$ er en basis for V.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β.

c) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

La $h = 2\sin x - 5\cos x \in V$.

d) Finn koordinatvektoren $[h]_\beta$.

e) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta'}$ på to måter.

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$

$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$

b) Per Proposisjon I fra Forelesning Va er

$$M_{\beta'}^{\beta} = [\mathrm{id}_V]_{\beta'}^{\beta} = \left([g_1]_\beta \mid [g_2]_\beta \right)$$

For å finne $[g_1]_\beta$ må vi skrive g_1 som en lineærkombinasjon av vektorene i β. Altså

$$g_1 = a f_1 + b f_2,$$

altså

$$2\sin x + \cos x = a\cos x + b\sin x,$$

som gir $a = 1$, $b = 2$. Dermed er

$$[g_1]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2. Husk at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{R}$-vektorrommet som består av *alle* funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nå lar vi $\beta = \{\cos x, \sin x\}$ og ser på underrommet

$$V = \operatorname{span}(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Merk at β er en basis for V.

a) Vis at også $\beta' = \{2\sin x + \cos x, 3\cos x\}$ er en basis for V.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β.

c) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

La $h = 2\sin x - 5\cos x \in V$.

d) Finn koordinatvektoren $[h]_\beta$.

e) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta'}$ på to måter.

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$

$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$

b) For å finne $[g_2]_\beta$ må vi skrive g_2 som en lineærkombinasjon av vektorene i β. Altså

$$g_2 = a f_1 + b f_2,$$

altså

$$3\cos x = a\cos x + b\sin x,$$

som gir $a = 3$, $b = 0$. Dermed er

$$[g_2]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi vet da at basisbyttematrisa fra β' til β er

$$\underline{\underline{M_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Oppgave 2. Husk at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{R}$-vektorrommet som består av *alle* funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nå lar vi $\beta = \{\cos x, \sin x\}$ og ser på underrommet

$$V = \mathsf{span}(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Merk at β er en basis for V.

a) Vis at også $\beta' = \{2\sin x + \cos x, 3\cos x\}$ er en basis for V.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β.

c) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

La $h = 2\sin x - 5\cos x \in V$.

d) Finn koordinatvektoren $[h]_\beta$.

e) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta'}$ på to måter.

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$

$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$

c) Per vår OBSERVASJON fra FORELESNING V9 (som vi også skal bevise i S9.4) er

$$M_{\beta}^{\beta'} = \left(M_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} \overset{b)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}}}$$

d) Siden $h = 2\sin x - 5\cos x = -5f_1 + 2f_2$ ser vi med en gang at

$$\underline{\underline{[h]_\beta = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}}}.$$

Oppgave 2. Husk at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er $\mathbb{R}$-vektorrommet som består av *alle* funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nå lar vi $\beta = \{\cos x, \sin x\}$ og ser på underrommet

$$V = \mathsf{span}\,(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Merk at β er en basis for V.

a) Vis at også $\beta' = \{2\sin x + \cos x, 3\cos x\}$ er en basis for V.

b) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β.

c) Finn basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$ fra β til β'.

La $h = 2\sin x - 5\cos x \in V$.

d) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta}$.

e) Finn koordinatvektoren $[h]_{\beta'}$ på to måter.

$f_1 = \cos x$ og $f_2 = \sin x$, så $\beta = \{f_1, f_2\}$

$g_1 = 2\sin x + \cos x$ og $g_2 = 3\cos x$, så $\beta' = \{g_1, g_2\}$

$h = 2\sin x - 5\cos x$

e) For å finne $[h]_{\beta'}$ bruker vi selvsagt ei basisbyttematrise:

$$[h]_{\beta'} = M_{\beta}^{\beta'} \cdot [h]_{\beta}$$

$$\overset{c)\,\&\,d)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

(En annen måte er å finne $[h]_{\beta'}$ "direkte" som i oppgave d).)