Oppgave 1. I hvert av de følgende tilfellene er $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ et polynom og β er en ordna basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Finn koordinatvektoren $[p]_\beta$.

a) $p = 7 - x + 2x^2$ og $\beta = \{1,\, x,\, x^2\}$

b) $p = 7 - x + 2x^2$ og $\beta = \{1 + x + x^2,\, x + x^2,\, x^2\}$

a) Vi må skrive p som en "ordnet" linearkombinasjon av vektorene : $\beta = \{1, x, x^2\}$

Altså, vi må finne $a, b, c \in \mathbb{R}$ slik at

$$p = 7 - x + 2x^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 .$$

Dette er kjempelett : $a = 7$, $b = -1$, $c = 2$.

Det betyr at

$$[p]_\beta = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 1. I hvert av de følgende tilfellene er $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ et polynom og β er en ordna basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Finn koordinatvektoren $[p]_\beta$.

a) $p = 7 - x + 2x^2$ og $\beta = \{1, x, x^2\}$

b) $p = 7 - x + 2x^2$ og $\beta = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$

b) Vi må skrive p som en "ordnet" linearkombinasjon av vektorene : $\beta = \{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$.

Altså, vi må finne $a, b, c \in \mathbb{R}$ slik at

$$p = 7 - x + 2x^2 = a \cdot (1+x+x^2) + b \cdot (x+x^2) + c \cdot x^2 .$$

Høyresida her er det samme som

$$a + (a+b)x + (a+b+c)x^2.$$

Altså får vi systemet

$$\left.\begin{aligned} a &= 7 \\ a + b &= -1 \\ a + b + c &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Løsning: $a = 7$, $b = -8$, $c = 3$

Det betyr at

$$\underline{\underline{[p]_\beta = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Oppgave 2. I hvert av de følgende tilfellene er $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ og β er en ordna basis for vektorrommet $\mathbb{R}^2$. Finn koordinatvektoren $[\bar{v}]_\beta$.

a) $\bar{v} = (3, -7)$ og $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$

b) $\bar{v} = (3, -7)$ og $\beta = \{(1, 1), (0, 2)\}$

c) $\bar{v} = (1, 1)$ og $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$

d) $\bar{v} = (1, 1)$ og $\beta = \{(1, 1), (0, 2)\}$

e) $\bar{v} = (x, y)$ og $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$

f) $\bar{v} = (x, y)$ og $\beta = \{(1, 1), (0, 2)\}$

e) Her er $\bar{v} = (x,y)$ og $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$.

Vi må finne $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{v} = (x,y) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1).$$

Dette er kjempelett: $a = x$ og $b = y$. Altså,

$$\underline{\underline{[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}}$$

Oppgave 2. I hvert av de følgende tilfellene er $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ og β er en ordna basis for vektorrommet $\mathbb{R}^2$. Finn koordinatvektoren $[\bar{v}]_\beta$.

a) $\bar{v} = (3, -7)$ og $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$

b) $\bar{v} = (3, -7)$ og $\beta = \{(1, 1), (0, 2)\}$

c) $\bar{v} = (1, 1)$ og $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$

d) $\bar{v} = (1, 1)$ og $\beta = \{(1, 1), (0, 2)\}$

e) $\bar{v} = (x, y)$ og $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$

f) $\bar{v} = (x, y)$ og $\beta = \{(1, 1), (0, 2)\}$

f) Her er $\bar{v} = (x,y)$ og $\beta = \{(1,1), (0,2)\}$.

Vi må finne $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{v} = (x,y) = a \cdot (1,1) + b \cdot (0,2).$$

Dette er overkommelig: $a = x$, $b = \frac{y-x}{2}$. Altså,

$$\underline{\underline{[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}}}$$

Oppgave 4. La lineærtransformasjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x, y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y).$$

a) La $\beta' \subset \mathbb{R}^2$ og $\gamma' \subset \mathbb{R}^3$ være våre standard ordna basiser. Finn matriserepresentasjonen $[f]_{\beta'}^{\gamma'}$.

b) Se nå på de ordna basisene

$$\beta = \{(3,\ 1),\ (5,\ 2)\} \text{ og } \gamma = \{(1,\ 0,\ -1),\ (-1,\ 2,\ 2),\ (0,\ 1,\ 2)\}$$

for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, henholdsvis. Finn matrisa $[f]_{\beta}^{\gamma}$.

a) Vi har $\beta' = \{(1,0), (0,1)\}$ og $\gamma' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Her har vi brukt formelen $f(x,y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y)$

Her blir

$$f(1,0) = (0,-5,-7) = 0 \cdot (1,0,0) - 5\,(0,1,0) - 7\,(0,0,1) \quad \text{og}$$

$$f(0,1) = (1,13,16) = 1 \cdot (1,0,0) + 13\,(0,1,0) + 16\,(0,0,1).$$

Dermed er

$$[f]_{\beta'}^{\gamma'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4. La lineærtransformasjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x, y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y).$$

a) La $\beta' \subset \mathbb{R}^2$ og $\gamma' \subset \mathbb{R}^3$ være våre standard ordna basiser. Finn matriserepresentasjonen $[f]_{\beta'}^{\gamma'}$.

b) Se nå på de ordna basisene

$$\beta = \{(3,\ 1),\ (5,\ 2)\} \text{ og } \gamma = \{(1,\ 0,\ -1),\ (-1,\ 2,\ 2),\ (0,\ 1,\ 2)\}$$

for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, henholdsvis. Finn matrisa $[f]_{\beta}^{\gamma}$.

a) Legg merke til: Når vi bruker standardbasisene for $\mathbb{R}^i$ som i denne oppgaven, kan vi lese matriserepresentasjonen rett fra uttrykket for $f(\bar{v})$.

(Her hadde vi jo

$$f(x,y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y)$$
$$= (0 + 1y, -5x + 13y, -7x + 16y)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}.)$$

Oppgave 4. La lineærtransformasjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x, y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y).$$

a) La $\beta' \subset \mathbb{R}^2$ og $\gamma' \subset \mathbb{R}^3$ være våre standard ordna basiser. Finn matriserepresentasjonen $[f]_{\beta'}^{\gamma'}$.

b) Se nå på de ordna basisene

$$\beta = \{(3, 1), (5, 2)\} \text{ og } \gamma = \{(1, 0, -1), (-1, 2, 2), (0, 1, 2)\}$$

for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, henholdsvis. Finn matrisa $[f]_\beta^\gamma$.

b) Vi har $\beta = \{(3,1), (5,2)\}$ og $\gamma = \{(1,0,-1), (-1,2,2), (0,1,2)\}$

Vi må skrive $f(3,1)$ og $f(5,2)$ som hver sin lineærkombinasjon av vektorene i γ.

Her har vi brukt formelen $f(x,y) = (y, -5x+13y, -7x+16y)$

Her blir

$$f(3,1) = (1,-2,-5) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2),$$

så vi får systemet

$$\left.\begin{aligned} a - b &= 1 \\ 2b + c &= -2 \\ -a + 2b + 2c &= -5 \end{aligned}\right\}$$

Løsning: $a = 1, b = 0, c = -2$

$$\Rightarrow [f(3,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4. La lineærtransformasjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved
$$f(x,y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y).$$

a) La $\beta' \subset \mathbb{R}^2$ og $\gamma' \subset \mathbb{R}^3$ være våre standard ordna basiser. Finn matriserepresentasjonen $[f]_{\beta'}^{\gamma'}$.

b) Se nå på de ordna basisene
$$\beta = \{(3,\ 1),\ (5,\ 2)\} \text{ og } \gamma = \{(1,\ 0,\ -1),\ (-1,\ 2,\ 2),\ (0,\ 1,\ 2)\}$$
for $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, henholdsvis. Finn matrisa $[f]_{\beta}^{\gamma}$.

Her har vi brukt formelen $f(x,y) = (y, -5x+13y, -7x+16y)$

b) Videre blir

$$f(5,2) = (2, 1, -3) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2),$$

som gir systemet

$$\left.\begin{aligned} a - b \quad\quad\quad &= 2 \\ 2b + c &= 1 \\ -a + 2b + 2c &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \text{Løsning: } a = 3,\ b = 1,\ c = -1$$

$$\Rightarrow [f(5,2)]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dermed blir

$$[f]_\beta^\gamma = \left([f(3,1)]_\gamma \,\middle|\, [f(5,2)]_\gamma \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9. La $D\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ være lineærtransformasjonen gitt ved derivasjon, altså $D(p) = p'$.

Finn en ordna basis β for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og en ordna basis γ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som gir

$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Husk fra et EKSEMPEL fra FORELESNING V8 at hvis $\beta' = \{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og $\gamma' = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ er våre standard ordna basiser, så blir

$$[D]_{\beta'}^{\gamma'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det betyr at de ordna basisene

$$\underline{\underline{\beta = \{x, \tfrac{x^2}{2}, \tfrac{x^3}{3}, 1\}}} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\gamma = \gamma'}} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

gir

$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$