Oppgave 1. Avgjør om de følgende lineærtransformasjonene er isomorfier.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $f(x, y) = (x, x + y)$,

(Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

a) Vi påstår at f er en isomorfi.

Merk at det holder å vise at $\operatorname{Ker} f = \{\bar{o}\}$.

$\operatorname{Ker} f = \{\bar{o}\} \Rightarrow f$ injektiv

$\Downarrow$

$\dim(\operatorname{Ker} f) = 0 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2$, i.e.

f surjektiv

Det faktum at $\operatorname{Ker} f = \{\bar{o}\}$ følger lett:

$(x, y) \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x, y) = (x, x+y) = (0, 0)$

$\Rightarrow x = 0$ og $y = 0$,

i.e. $(x, y) = \bar{o}$.

Oppgave 2. La $f\colon U \longrightarrow V$ og $g\colon V \longrightarrow W$ være lineærtransformasjoner. Husk at da er funksjonen $g \circ f\colon U \longrightarrow W$ også en lineærtransformasjon.

a) Vis at hvis både f og g er inverterbare, så er $g \circ f$ inverterbar.

b) Vis at hvis $g \circ f$ er inverterbar, så er f injektiv.

a) Anta at f og g er inverterbare. Da finnes

$$f^{-1}: V \longrightarrow U \quad \text{slik at} \quad f \circ f^{-1} \overset{(*)}{=} id_V \quad \text{og} \quad f^{-1} \circ f \overset{(**)}{=} id_U$$

og

$$g^{-1}: W \longrightarrow V \quad \text{slik at} \quad g \circ g^{-1} \overset{(*)}{=} id_W \quad \text{og} \quad g^{-1} \circ g \overset{(**)}{=} id_V$$

Det følger at $f^{-1} \circ g^{-1}$ er en invers til $g \circ f$, altså at $g \circ f$ er inverterbar med $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \overset{(*)}{=} g \circ id_V \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \overset{(*)}{=} id_W$$

og

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \overset{(**)}{=} f^{-1} \circ id_V \circ f = f^{-1} \circ f \overset{(**)}{=} id_U$$

Oppgave 2. La $f\colon U \longrightarrow V$ og $g\colon V \longrightarrow W$ være lineærtransformasjoner. Husk at da er funksjonen $g \circ f\colon U \longrightarrow W$ også en lineærtransformasjon.

a) Vis at hvis både f og g er inverterbare, så er $g \circ f$ inverterbar.

b) Vis at hvis $g \circ f$ er inverterbar, så er f injektiv.

(Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

b) Vil vise: $g \circ f$ inverterbar $\Rightarrow$ f injektiv

Ekvivalent: f ikke injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ikke inverterbar

Så anta at f ikke er injektiv. Da er $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$, så det finnes $\bar{0}_U \neq \bar{u} \in U$ slike at $f(\bar{u}) = \bar{0}_V$. Da er

$$g \circ f(\bar{u}) = g(f(\bar{u})) = g(\bar{0}_V) = \bar{0}_W,$$

altså $\bar{u} \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Siden $\bar{u} \neq \bar{0}_U$ har vi vist at $\operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \{\bar{0}\}$, så $g \circ f$ er ikke injektiv og dermed ikke inverterbar.

Oppgave 4. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom. Vis at
$$V \cong W \iff \dim V = \dim W.$$

(Her bruker vi PROPOSISJON fra FORELESNING V7)

Skal vise: $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

$\Rightarrow$: Anta at $V \cong W$. Da finnes en isomorfi $f: V \to W$. Siden f er inverterbar har vi:

$\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$, så $\dim(\operatorname{Ker} f) \overset{(*)}{=} 0$ og

$\operatorname{Im} f = W$. så $\dim(\operatorname{Im} f) \overset{(**)}{=} \dim W$.

FUNDAMENTALTEOREMET fra V6 gir nå

(*) og (**)

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim W$$

Oppgave 4. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom. Vis at

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W.$$

(Her bruker vi Proposisjon fra Forelesning V7)

Skal vise: $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

$\Leftarrow$: Anta at $\dim V = \dim W$. Da finnes basiser $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ og $\beta = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subset W$.

Definér (v.h.a. Teorem fra Forelesning V5) en lineærtransformasjon $f: V \to W$ ved $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \ \forall i$.

Dette vil si at

$$f(\underbrace{a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n}_{\text{Slik ser en vilkårlig } \bar{v} \in V \text{ ut!}}) = a_1\bar{w}_1 + \dots + a_n\bar{w}_n.$$

Da har vi at

- f er surjektiv (span$(\beta) = W$) og at
- f er injektiv (β er lineært uavhengig).

Altså er f inverterbar (a.k.a. en isomorfi), som betyr $V \cong W$.