Oppgave 2. Husk den lineære operatoren $s\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gitt ved "skift mot venstre", det vil si

$$(r_1, r_2, r_3, \ldots) \overset{s}{\longmapsto} (r_2, r_3, r_4, \ldots).$$

a) Hva er kjernen $\mathsf{Ker}\, s$ til s? Er s injektiv (i.e., 1–1)?

b) Hva er bildet $\mathsf{Im}\, s$ til s? Er s surjektiv (i.e., på)?

a) La $\bar{u} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Da er $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$, $u_i \in \mathbb{R}$, og vi har

$$s(\bar{u}) = (u_2, u_3, u_4, \ldots).$$

Altså er $s(\bar{u}) = \bar{0} \iff 0 = u_2 = u_3 = u_4 = \ldots$

Det vil si at

$$\mathrm{Ker}\ s = \{(x, 0, 0, \ldots) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$\underbrace{\text{Siden } \mathrm{Ker}\ s \neq \{\bar{0}\} \text{ er } s \text{ ikke injektiv.}}$

Dette er vårt TRIKS! fra Forelesning V6

Oppgave 2. Husk den lineære operatoren $s\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gitt ved "skift mot venstre", det vil si

$$(r_1, r_2, r_3, \ldots) \overset{s}{\longmapsto} (r_2, r_3, r_4, \ldots).$$

a) Hva er kjernen $\operatorname{Ker} s$ til s? Er s injektiv (i.e., 1–1)?

b) Hva er bildet $\operatorname{Im} s$ til s? Er s surjektiv (i.e., på)?

b) La $\bar{v} = (v_1, v_2, v_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ være vilkårlig.

Hvis vi lar $\bar{w} = (0, v_1, v_2, v_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
så blir

$$\bar{v} = s(\bar{w}) \in \operatorname{Im} s.$$

Det betyr at $\operatorname{Im} s = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, og s er surjektiv.

Oppgave 5. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom og la $f : V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon. Vis at

a) hvis $\dim V < \dim W$, så er f ikke surjektiv, og

b) hvis $\dim V > \dim W$, så er f ikke injektiv.

a) FUNDAMENTALTEOREMET for lineærtransformasjoner (V6)

sier $\dim V = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f)$.

Det betyr at

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V - \underbrace{\dim(\ker f)}_{\geq 0}$$
$$\leq \dim V$$
Per antagelse → $$< \dim W$$

Dermed kan vi bruke S4.6 som sier at nå må $\operatorname{Im} f \subsetneq W$, så f er ikke surjektiv.

"Ekte underrom", altså
$\operatorname{Im} f \subset W$ og $\operatorname{Im} f \neq W$.

Oppgave 5. La V og W være endeligdimensjonale vektorrom og la $f : V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon. Vis at

a) hvis $\dim V < \dim W$, så er f ikke surjektiv, og

b) hvis $\dim V > \dim W$, så er f ikke injektiv.

b) FUNDAMENTALTEOREMET for lineærtransformasjoner (V6) sier $\dim V = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.

Det betyr at

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim V - \dim(\operatorname{Im} f)$$

$\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim W \longrightarrow$ $\geq \dim V - \dim W$

> 0

Per antagelse

Dermed er $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$,

så f er ikke injektiv (husk vårt TRIKS! fra V6).

Husk: En lineærtransformasjon er entydig bestemt av sin virkning på en basis.

Det vil si at hvis V og W er vektorrom og $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ er en basis, så kan *du velge deg* n vektorer

$$\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n \in W,$$

og det vil finnes en (entydig) lineærtransformasjon $f \colon V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, \ldots, f(\bar{v}_n) = \bar{w}_n.$$

Oppgave 6. La $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ og *velg ut* de følgende to vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$(*) \qquad t(\bar{e}_1) = (1, 2, 3) \text{ og } t(\bar{e}_2) = (4, 5, 6).$$

I følge påminnelsen over finnes det nøyaktig én lineærtransformasjon $t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som oppfyller begge ligningene i $(*)$.

(a) Er t surjektiv?

(b) La $\bar{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ være en vilkårlig vektor. Finn et uttrykk for $t(\bar{v})$.

a) $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$, så i følge S6.5 er t ikke surjektiv.

Oppgave 6. La $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ og *velg ut* de følgende to vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$(*) \qquad t(\bar{e}_1) = (1,\, 2,\, 3) \text{ og } t(\bar{e}_2) = (4,\, 5,\, 6).$$

I følge påminnelsen over finnes det nøyaktig én lineærtransformasjon $t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som oppfyller begge ligningene i $(*)$.

(a) Er t surjektiv?

(b) La $\bar{v} = (x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ være en vilkårlig vektor. Finn et uttrykk for $t(\bar{v})$.

$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t(\bar{e}_1) = (1,2,3)$

$t(\bar{e}_2) = (4,5,6)$

b) La $\bar{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Da er

$$\bar{v} = (x,0) + (0,y) \overset{(*)}{=} x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2$$

Det betyr, siden $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ skal være en lineærtransformasjon, at vi må ha

$$t(\bar{v}) \overset{(*)}{=} t(x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2)$$

$t(\bar{u}+\bar{w}) = t(\bar{u}) + t(\bar{w})$ $\longrightarrow$ $= t(x \cdot \bar{e}_1) + t(y \cdot e_2)$

$= x \cdot t(\bar{e}_1) + y \cdot t(\bar{e}_2)$ Disse kjennes vi!

$t(a\bar{u}) = at(\bar{u})$

$= x \cdot (1,2,3) + y \cdot (4,5,6)$

$= (x, 2x, 3x) + (4y, 5y, 6y)$

$= \underline{\underline{(x+4y,\ 2x+5y,\ 3x+6y)}}$