Oppgave 1. La $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon. Anta at

$$f(1, 1, 1) = (1, 3) \text{ og at } f(0, 1, 0) = (2, 5).$$

Er det mulig å si hva $f(1, -1, 1)$ må være? Si det i så fall!

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$f(1,1,1) = (1,3)$
$f(0,1,0) = (2,5)$

Skriv $\bar{u} = (1,1,1)$, $\bar{v} = (0,1,0)$ og $\bar{w} = (1,-1,1)$.

Poenget her er at siden f er lineær og vi kjenner $f(\bar{u})$ og $f(\bar{v})$, så kan vi finne regelen for f på hele span$(\bar{u}, \bar{v})$. Så siden

$$\bar{w} = \bar{u} - 2\bar{v} \in \text{span}(\bar{u}, \bar{v})$$

kan vi regne ut $f(\bar{w})$:

$$f(\bar{w}) = f(\bar{u} - 2\bar{v})$$

$$= f(\bar{u}) - f(2\bar{v})$$

$$= \underbrace{f(\bar{u})}_{\text{Kjent!}} - 2 \cdot \underbrace{f(\bar{v})}_{\text{Kjent!}} = (1,3) - 2 \cdot (2,5) = (-3, -7)$$

f er lineær, så
$f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$
$f(a\bar{x}) = af(\bar{x})$

Oppgave 6. La $f\colon U \longrightarrow V$ og $g\colon V \longrightarrow W$ være lineærtransformasjoner. Vis at den sammensatte funksjonen

$$g \circ f\colon U \longrightarrow W$$

er en lineærtransformasjon.

Anta at $f: U \to V$ og $g: V \to W$ er lineærtransformasjoner.

La $\bar{u}, \bar{v} \in U$. Da blir

$$(g \circ f)(\bar{u}+\bar{v}) = g(f(\bar{u}+\bar{v})) = g(f(\bar{u}) + f(\bar{v}))$$

$$= g(f(\bar{u})) + g(f(\bar{v}))$$

$$= (g \circ f)(\bar{u}) + (g \circ f)(\bar{v}).$$

f er linear

g er linear

Definisjon av $g \circ f$

Forklar selv hvorfor vi har hver av disse likhetene!

La $a \in F$. Da blir

$$(g \circ f)(a\bar{u}) = g(f(a\bar{u})) = g(a f(\bar{u})) = a g(f(\bar{u}))$$

$$= a(g \circ f)(\bar{u}).$$

Dette viser at $g \circ f$ er en lineærtransformasjon.