Oppgave 1. Se på delmengden

$$U = \{(a,\, b,\, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Vis at U er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Vis at $\{(1,\, 0,\, 1),\ (0,\, 1,\, 0)\}$ er en basis for U.

a) Vi bruker standardmetoden (PROPOSISJON, FORELESNING 2).

i) $\bar{0} = (0,0,0) \in U$ er opplagt

ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} = (a,b,a),\ \bar{v} = (c,d,c)$
$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} = (a+c,\, b+d,\, a+c) \in U$

iii) $\bar{u} \in U \Rightarrow \bar{u} = (a, b, a)$
$\Rightarrow r\bar{u} = (ra, rb, ra) \in U \quad \forall r \in \mathbb{R}.$

Siden $U \subset \mathbb{R}^3$ oppfyller i), ii) og iii) er U et underrom.

Oppgave 1. Se på delmengden

$$U = \{(a,\, b,\, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Vis at U er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Vis at $\{(1,\,0,\,1),\ (0,\,1,\,0)\}$ er en basis for U.

b) Skriv $B = \{(1,0,1), (0,1,0)\}$.

B utspenner U: For hver $\bar{u} \in U$ har vi

$$\bar{u} = (a,b,a) = a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,0) \in \operatorname{span}(B)$$

B er lineært uavhengig: Hvis

$$(0,0,0) = \bar{0} = a \cdot (1,0,1) + b\,(0,1,0),$$

så må $a = 0 = b$.

Eventuelt: $(1,0,1)$ er ikke et skalarmultiplum av $(0,1,0)$, så B er lineært uavhengig i følge S3.8

Oppgave 6. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med et underrom $U \subset V$.

a) Vis at $\dim U \leq \dim V$.

b) Vis at $\dim U = \dim V$ hvis og bare hvis $U = V$.

a) La B være en basis for U og la B' være en basis for V. Da har vi at

- B er lineært uavhengig i V og at
- B' genererer V.

Da gir LEMMA II fra FORELESNING E3 at

$$\dim U = |B| \leq |B'| = \dim V$$

Oppgave 6. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med et underrom $U \subset V$.

a) Vis at $\dim U \leq \dim V$.

b) Vis at $\dim U = \dim V$ hvis og bare hvis $U = V$.

b) $U = V \Rightarrow \dim U = \dim V$ er selvsagt opplagt.

Anta nå at $\dim U = \dim V = n$. Vi må vise at $U = V$, altså at $V \subset U$ ($U \subset V$ er jo en del av premisset for oppgaven). La $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ være en basis for U. Da er B en basis også for V (bruk PROPOSISJON II i) fra FORELESNING 4). Så for hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$\bar{v} = a_1\bar{u}_1 + \dots + a_n\bar{u}_n \in \operatorname{span}(B) = U,$$

(altså $\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} \in U$).