Oppgave 3. I vektorrommet $\mathbb{C}[x]$ har vi vektorene
$$f = x^2 + 1,\ g = x + 5 \text{ og } h = x + 4.$$
Vis at $\operatorname{span}(f, g, h) = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$.

Inklusjonen $\operatorname{span}(f,g,h) \overset{(*)}{\subset} \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ er opplagt (graden til en lineærkombinasjon av f, g og h kan jo aldri bli > 2).

For å vise at $\mathbb{C}[x]_{\leq 2} \overset{(**)}{\subset} \operatorname{span}(f,g,h)$ holder det å vise at $1, x, x^2 \in \operatorname{span}(f,g,h)$ (hvorfor?). Dette er en smal sak:

$$1 = g - h \in \operatorname{span}(f,g,h) \checkmark$$
$$x = 5h - 4g \in \operatorname{span}(f,g,h) \checkmark$$
$$x^2 = f - g + h \in \operatorname{span}(f,g,h) \checkmark$$

(*) og (**) gir nå til sammen at $\operatorname{span}(f,g,h) = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$.

Oppgave 9. La S være en delmengde i et vektorrom.
Vis at hvis det finnes en $\bar{v} \in S$ slik at $\bar{v} \in \text{span}(S \setminus \{\bar{v}\})$, så er S lineært avhengig.

Anta at $\bar{v} \in S$ er slik at $\bar{v} \in \text{span}(\underbrace{S \setminus \{\bar{v}\}}_{\text{"S med } \bar{v} \text{ fjernet"}})$. (*)

Skal vise: S er lineært avhengig.

Vi kan anta $\bar{v} \neq \bar{0}$ (enhver mengde som inneholder $\bar{0}$ er lineært avhengig).

Per (*) finnes $\bar{v}_i \in S \setminus \{\bar{v}\}$, $a_i \in F$ slik at

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n .$$

Merk at her må minst én $a_i \neq 0$ (fordi: $\bar{v} \neq \bar{0}$).

Da får vi:

$$\bar{0} = \bar{v} - \bar{v} = \bar{v} - a_1\bar{v}_1 - \dots - a_n\bar{v}_n \qquad (\bar{v}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in S)$$

med minst én $a_i \neq 0$, som per definisjon betyr at S er lineært avhengig.