Oppgave 2. Avgjør om de følgende delmengdene av $\mathbb{R}^3$ er underrom.

a) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$

b) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 5x_3\}$

PROPOSISJON I

En delmengde U av et vektorrom er et underrom hvis og bare hvis vi har

i) $\bar{0} \in U$,

ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U$ og

iii) $a \in F$, $\bar{u} \in U \Rightarrow a\bar{u} \in U$

a) Delmengden $C \subset \mathbb{R}^3$ inneholder ikke nullvektoren $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (siden $0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \neq 4$). Dermed er C ikke et underrom, siden C ikke oppfyller krav i) fra PROPOSISJON I fra FORELESNING V2.

Oppgave 2. Avgjør om de følgende delmengdene av $\mathbb{R}^3$ er underrom.

a) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$

b) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 5x_3\}$

b) Delmengden $D \subset \mathbb{R}^3$ oppfyller i), ii) og iii) fra PROPOSISJON I og er dermed et underrom.

i) $\bar{0} = (0,0,0) \in D$ $\quad (0 = 5 \cdot 0)$

ii) $(x_1, x_2, x_3), \ (y_1, y_2, y_3) \in D$

$\Rightarrow x_1 = 5x_3$ og $y_1 = 5y_3$.

Vi får

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in D$

siden

$$x_1 + y_1 = 5x_3 + 5y_3 = 5(x_1 + y_1).$$

iii) $(x_1, x_2, x_3) \in D \Rightarrow x_1 = 5x_3$.

Så for hver $a \in \mathbb{R}$ blir

$$a(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3) \in D$$

siden $ax_1 = a \cdot 5x_3 = 5ax_3$.

Oppgave 5. Avgjør om de følgende delmengdene av $\mathbb{R}[x]$ er underrom.

a) $A = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$

b) $B = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 5\} \subset \mathbb{R}[x]$

a) Delmengden $A \subset \mathbb{R}[x]$ oppfyller i), ii) og iii) fra PROPOSISJON I og er et underrom.

i) Opplagt

ii) $p, q \in A \Rightarrow p(1) = 0$ og $q(1) = 0$

$\Rightarrow p+q(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$,

altså $p + q \in A$.

iii) $p \in A$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$,

altså $\lambda p \in A$.

Oppgave 5. Avgjør om de følgende delmengdene av $\mathbb{R}[x]$ er underrom.

a) $A = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$

b) $B = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 5\} \subset \mathbb{R}[x]$

Sjekk dette selv!

b) Delmengden $B \subset \mathbb{R}[x]$ bryter med i), ii) og iii) fra PROPOSISJON I, og er ikke et underrom.