Oppgave 1 La V være et vektorrom. Vis, ved å bare bruke vektorrom-aksiomene (se vedlegg):

a) Hvis $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$ for noen $\vec{x},\vec{y}$ og $\vec{z}$ i V, så er $\vec{y}=\vec{z}$.

b) Hvis $\vec{x}+\vec{x}=\vec{x}$ for en $\vec{x}$ i V, så er $\vec{x}=\vec{0}$.

a) Anta at $\bar{x}+\bar{y}=\bar{x}+\bar{z}$.

Skal vise: $\boxed{\bar{y}=\bar{z}}$.

Ved VS4 finnes $\bar{w}\in V$ slik at $\bar{x}+\bar{w}=\bar{0}$. Da får vi:

$$(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}=(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}$$

$$\overset{\text{VS1}}{\Rightarrow}(\bar{y}+\bar{x})+\bar{w}=(\bar{z}+\bar{x})+\bar{w}$$

$$\overset{\text{VS2}}{\Rightarrow}\bar{y}+\underbrace{(\bar{x}+\bar{w})}_{=\bar{0}}=\bar{z}+\underbrace{(\bar{x}+\bar{w})}_{=\bar{0}}$$

$$\overset{\text{VS3}}{\Rightarrow}\boxed{\bar{y}=\bar{z}}.$$

Oppgave 1 La V være et vektorrom. Vis, ved å bare bruke vektorrom-aksiomene (se vedlegg):

a) Hvis $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$ for noen $\vec{x},\vec{y}$ og $\vec{z}$ i V, så er $\vec{y}=\vec{z}$.

b) Hvis $\vec{x}+\vec{x}=\vec{x}$ for en $\vec{x}$ i V, så er $\vec{x}=\vec{0}$.

b) Anta at $\bar{x}+\bar{x}=\bar{x}$.

Skal vise: $\bar{x}=\bar{0}$.

Ved VS3 har vi: $\bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$, så til sammen må

$$\bar{x}+\bar{x}=\bar{x}+\bar{0}.$$

Det følger fra a) at $\bar{x}=\bar{0}$.

Oppgave 2. La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$.

a) Vis at nullvektoren $\bar{0} \in V$ er entydig.

b) Vis at for hver vektor $\bar{v} \in V$ er $0 \cdot \bar{v} = \bar{0}$.

a) Anta at $\bar{0}, \bar{0}' \in V$ er null-vektor

Skal vise: $\bar{0} = \bar{0}'$.

Vi får

$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}'$ (fordi: $\bar{0}'$ er null-vektor)

$\|$

$\bar{0}' = \bar{0}' + \bar{0}$ (fordi: $\bar{0}$ er null-vektor)

Vektorromsaksiom II
fra FORELESNING V1

Altså er $\bar{0} = \bar{0}'$.

Oppgave 2. La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$.

a) Vis at nullvektoren $\bar{0} \in V$ er entydig.

b) Vis at for hver vektor $\bar{v} \in V$ er $0 \cdot \bar{v} = \bar{0}$.

b) La $\bar{v} \in V$.

Skal vise: $\boxed{\underbrace{0}_{\text{Tallet null}} \cdot \bar{v} = \underbrace{\bar{0}}_{\text{Nullvektor}}}$

Vi har

$$0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} \overset{\text{VII}}{=} 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} \qquad (*)$$

og dermed

$$\begin{aligned} \bar{0} &\overset{\text{IV}}{=} 0 \cdot \bar{v} - 0 \cdot \bar{v} \\ &\overset{(*)}{=} (0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}) - 0 \cdot \bar{v} \\ &\overset{\text{I}}{=} 0 \cdot \bar{v} + \underbrace{(0 \cdot \bar{v} - 0 \cdot \bar{v})}_{=\bar{0}} \\ &\overset{\text{IV}}{=} 0 \cdot \bar{v}. \end{aligned}$$

Altså er $\boxed{\bar{0} = 0 \cdot \bar{v}}$