**Oppgave 2.** Finn et polynom $u \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ som er slik at

$$\int_{-1}^{1} v(t)\cos(\pi t)dt = \int_{-1}^{1} v(t)u(t)dt$$

for hver $v \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

*Hint:* I V19 fant vi en ortonormal basis for det relevante indreproduktrommet!

Ortonormal basis for $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ med $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\,q(t)\,dt$ :

$$\bar{e}_1(t) = \sqrt{1/2} \; ; \; \bar{e}_2(t) = \sqrt{3/2}\, t \; ; \; \bar{e}_3(t) = \sqrt{45/8}\left(t^2 - \tfrac{1}{3}\right).$$

Definer en lineær funksjonal $\phi : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\phi(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\cos(\pi t)\,dt$$

Ved TEOREM fra V20 finnes en $q \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ slik at

$$\int_{-1}^{1} p(t)\cos(\pi t)\,dt = \phi(p) = \langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\,q(t)\,dt \quad \forall\; p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$$

Det er altså denne $q$ vi er ute etter!

Beviset for samme TEOREM avslører at

$$q = \phi(\bar{e}_1)\,\bar{e}_1 + \phi(\bar{e}_2)\,\bar{e}_2 + \phi(\bar{e}_3)\,\bar{e}_3$$

$$= \dots = -\frac{45}{2\pi^2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$