V24

UNITÆRE OG ORTOGONALE OPERATORER

V24

UNITÆRE OG ORTOGONALE OPERATORER

LEMMA

La V være et **reelt** indreproduktrom. For hver $\bar{u}, \bar{v} \in V$ er

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|^2}{4}.$$

BEVIS

Samarbeidsoppgave. $\square$

V24

UNITÆRE OG ORTOGONALE OPERATORER

LEMMA

La V være et reelt indreproduktrom. For hver $\bar{u}, \bar{v} \in V$ er
$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|^2}{4}.$$

BEVIS

Samarbeidsoppgave. $\square$

LEMMA

La V være et komplekst indreproduktrom. For hver $\bar{u}, \bar{v} \in V$ er
$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|^2 + \|\bar{u}+i\bar{v}\|^2 i - \|\bar{u}-i\bar{v}\|^2 i}{4}$$

BEVIS

Samarbeidsoppgave. $\square$

LEMMA

La V være et enddigdimensjonalt vektorom og la f og g være lineære operatorer på V. Da er

$$f \circ g = \mathrm{id}_V \iff g \circ f = \mathrm{id}_V .$$

BEVIS

Samarbeidsoppgave. $\square$

LEMMA

La V være et enddigdimensjonalt vektorom og la f og g være lineære operatorer på V. Da er

$$f \circ g = id_V \iff g \circ f = id_V .$$

BEVIS

Samarbeidsoppgave. $\square$

DEFINISJON

En operator $s : V \longrightarrow V$ er en isometri hvis

$$\| s(\bar{v}) \| = \| \bar{v} \| \quad \text{for hver } \bar{v} \in V.$$

- Hvis $F = \mathbb{R}$, så kalles en isometri også en ortogonal operator.
- Hvis $F = \mathbb{C}$, så kalles en isometri også en unitær operator.

EKSEMPEL

La $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ være slik at $|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_n| = 1$ og la $s : V \longrightarrow V$ være slik at $s(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i$ for en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ for V.

Da er s en isometri.

Γ

$\llcorner$

EKSEMPEL

La $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ være slik at $|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_n| = 1$ og la $s : V \longrightarrow V$ være slik at $s(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i$ for en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ for V.

Da er s en isometri.

$\ulcorner$

For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \ldots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n \qquad (*)$$

og

$$\|\bar{v}\|^2 = |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \ldots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2. \qquad (**)$$

$\llcorner$

EKSEMPEL

La $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ være slik at $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$ og la $s : V \longrightarrow V$ være slik at $s(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i$ for en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ for V.

Da er s en isometri.

Γ

For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n \qquad (*)$$

og

$$\|\bar{v}\|^2 = |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2. \qquad (**)$$

$(*)$ gir

$$\begin{aligned} s(\bar{v}) &= \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle s(\bar{e}_1) + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle s(\bar{e}_n) \\ &= \lambda_1 s(\bar{e}_1) + \dots + \lambda_n s(\bar{e}_n) \qquad (***) \end{aligned}$$

Nå gir $(***)$ og betingelsene $|\lambda_i| = 1$ at

$$\|S(\bar{v})\|^2 = |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2. \qquad (****)$$

Altså får vi $\|\bar{v}\| = \|s(\bar{v})\|$ fra $(**)$ og $(****)$.

$\llcorner$

TEOREM

La s være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V. De følgende påstandene er ekvivalente.

a) s er en isometri.

b) $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \quad \forall \; \bar{u}, \bar{v} \in V$.

c) $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal for hver ortonormal liste $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ i V.

d) Det eksisterer en ortonormal basis $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ for V slik at $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

e) $s \circ s^* = id_V$.

f) $s^* \circ s = id_V$.

g) s^* er en isometri.

h) s er inverterbar og $s^{-1} = s^*$.

BEVIS

a) s er en isometri.

b) $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \quad \forall \quad \bar{u}, \bar{v} \in V$.

a) => b) Anta at s er en isometri.

Hvis $F = \mathbb{R}$ bruker vi vårt **LEMMA**:
For hver $\bar{u}, \bar{v} \in V$ har vi:

$$\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \frac{\|s(\bar{u}) + s(\bar{v})\|^2 - \|s(\bar{u}) - s(\bar{v})\|^2}{4}$$

$$\overset{s \text{ lineær}}{=} \frac{\|s(\bar{u}+\bar{v})\|^2 - \|s(\bar{u}-\bar{v})\|^2}{4}$$

$$\overset{s \text{ isometri}}{=} \frac{\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|^2}{4}$$

$$= \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle.$$

Hvis $F = \mathbb{C}$ bruker vi **LEMMA** på samme måte for å vise $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$.

BEVIS

b) $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \quad \forall \quad \bar{u}, \bar{v} \in V.$

c) $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal for hver ortonormal liste $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ i V.

b) $\Rightarrow$ c) Anta at $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \quad \forall \quad \bar{u}, \bar{v} \in V$ og la $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ være en ortonormal liste i V.

Da er lista $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ ortonormal fordi: $\langle s(\bar{e}_i), s(\bar{e}_j)\rangle = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j\rangle$ $\forall \ 1 \leq i, j \leq n$.

BEVIS

c) $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal for hver ortonormal liste $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ i V.

d) Det eksisterer en ortonormal basis $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ for V slik at $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

c) => d) Dette er opplagt sant.

BEVIS

d) Det eksisterer en ortonormal basis $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ for V slik at $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

e) $s \circ s^* = id_V$.

d) => e) Anta at $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ er en ortonormal basis for V slik at $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

Da har vi:

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \langle s(\bar{e}_i), s(\bar{e}_j) \rangle = \langle s^*(s(\bar{e}_i)), \bar{e}_j \rangle$$

$\forall \ 1 \leq i, j \leq k$.

Dette impliserer $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle s^*(s(\bar{u})), \bar{v} \rangle$ for hver $\bar{u}, \bar{v} \in V$, siden $\bar{u}$ og $\bar{v}$ kan skrives som lineærkombinasjoner av $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$.

Det betyr $\bar{u} = s^*(s(\bar{u})) \ \forall \ \bar{u} \in V$, altså

$$s^* \circ s = id_V.$$

BEVIS

e) $s \circ s^* = id_V$.

f) $s^* \circ s = id_V$.

e) => f) Dette følger fra vårt **LEMMA**

BEVIS

f) $S^* \circ S = id_V$.

g) S^* er en isometri,

f) $\Rightarrow$ g) Anta at $S^* \circ S = id_V$.

For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$\begin{aligned}
\|S^*(\bar{v})\|^2 &= \langle S^*(\bar{v}), S^*(\bar{v}) \rangle \\
&= \langle S(S^*(\bar{v})), \bar{v} \rangle \\
&= \langle id_V(\bar{v}), \bar{v} \rangle \\
&= \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \|\bar{v}\|^2,
\end{aligned}$$

så S^* er en isometri.

BEVIS

g) s^* er en isometri,
h) s er inverterbar og $s^{-1} = s^*$.

$$\text{a) } s \text{ er en isometri, } \begin{array}{l} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \text{ e) } s \circ s^* = id_V. \\ \overset{(**)}{\Longrightarrow} \text{ f) } s^* \circ s = id_V. \end{array}$$

g) => h) Anta at s^* er en isometri.

Vi har vist at a) => e) og at a) => f).

Så bruk implikasjonene (*) og (**) med s^* i stedet for s (og husk $(s^*)^* = s$). Dette gir $s \circ s^* = id_V$ og $s^* \circ s = id_V$, så s er inverterbar med $s^{-1} = s^*$.

BEVIS

h) s er inverterbar og $s^{-1} = s^*$.
a) s er en isometri.

h) => a) Anta at s er inverterbar med $s^{-1} = s^*$.

Da er $s^* \circ s = id_V$, så for hver $\bar{v} \in V$ er

$$\begin{aligned} \|s(\bar{v})\|^2 &= \langle s(\bar{v}), s(\bar{v}) \rangle \\ &= \langle s^*(s(\bar{v})), \bar{v} \rangle \\ &= \langle id_V(\bar{v}), \bar{v} \rangle \\ &= \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \|\bar{v}\|^2, \end{aligned}$$

så s er en isometri.

Nå har vi vist
a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a). $\square$