# V23

## SPEKTRALTEOREMENE

### DEFINISJON

$f$ er diagonaliserbar hvis det finnes en basis $\beta$ for $V$ slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### ALTERNATIV DEFINISJON

La $\dim V < \infty$.

i) Operatoren $f: V \longrightarrow V$ er diagonaliserbar

$\iff$

det finnes en ordna basis for $V$ som består av egenvektorer for $f$.

# V23

## SPEKTRALTEOREMENE

### DEFINISJON

$f$ er diagonaliserbar hvis det finnes en basis $\beta$ for $V$ slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### ALTERNATIV DEFINISJON

La $\dim V < \infty$.

i) Operatoren $f: V \to V$ er diagonaliserbar

$\Longleftrightarrow$

det finnes en ordna basis for $V$ som består av egenvektorer for $f$.

Når finnes en ortonormal basis $\beta$ for $V$ slik at $[f]_\beta$ er diagonal?

# V23

## SPEKTRALTEOREMENE

**DEFINISJON**

$f$ er diagonaliserbar hvis det finnes en basis $\beta$ for $V$ slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**ALTERNATIV DEFINISJON**

La $\dim V < \infty$.

i) Operatoren $f: V \to V$ er diagonaliserbar

$\iff$

det finnes en ordna basis for $V$ som består av egenvektorer for $f$.

Når finnes en ortonormal basis $\beta$ for $V$ slik at $[f]_\beta$ er diagonal?

- Over $\mathbb{C}$: Hvis og bare hvis $f$ er normal,
- Over $\mathbb{R}$: Hvis og bare hvis $f$ er selv-adjungert.

# DET KOMPLEKSE SPEKTRALTEOREMET

## TEOREM

La $V$ være et komplekst indreproduktrom med $\dim V < \infty$ og la $f$ være en lineær operator på $V$.
De følgende påstandene er ekvivalente:

(a) $f$ er normal.

(b) $V$ har en ortonormal basis som består av egenvektorer for $f$.

(c) Det finnes en ortonormal basis $\beta$ for $V$ som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal.

# DET KOMPLEKSE SPEKTRALTEOREMET

## TEOREM

La $V$ være et komplekst indreproduktrom med $\dim V < \infty$ og la $f$ være en lineær operator på $V$.
De følgende påstandene er ekvivalente:

(a) $f$ er normal.

(b) $V$ har en ortonormal basis som består av egenvektorer for $f$.

(c) Det finnes en ortonormal basis $\beta$ for $V$ som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal.

## BEVIS

(b) <=> (c) er lett/kjent (se e.g. V14).

(c) => (a): Anta at (c) holder. Siden $[f]_\beta$ er diagonal og $\beta$ er ortonormal, er også $[f^*]_\beta = ([f]_\beta)^*$ diagonal. Siden to diagonale matriser alltid kommuterer, følger det at
$[f \circ f^*]_\beta = [f]_\beta \circ ([f]_\beta)^* = ([f]_\beta)^* \circ [f]_\beta = [f^* \circ f]_\beta$, så $f \circ f^* = f^* \circ f$.

(a) $\Rightarrow$ (c): Anta at $f$ er normal. Ved Schurs Teorem (V20) finnes en ortonormal basis $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi skal vise at $[f]_\beta$ faktisk er diagonal.

(a) $\Rightarrow$ (c): Anta at $f$ er normal. Ved Schurs Teorem (V20) finnes en ortonormal basis $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi skal vise at $[f]_\beta$ faktisk er diagonal.

Observér at
- $\|f(\bar{e}_1)\|^2 = |a_{1,1}|^2$
- $\|f^*(\bar{e}_1)\|^2 = |a_{1,1}|^2 + |a_{1,2}|^2 + \dots + |a_{1,n}|^2$

Men $f$ er normal, så $\|f(\bar{e}_1)\| = \|f^*(\bar{e}_1)\|$ (PROPOSISJON fra V22)

$\Rightarrow a_{1,2} = \dots = a_{1,n} = 0.$

(a) ⇒ (c): Anta at $f$ er normal. Ved Schurs Teorem (V20) finnes en ortonormal basis $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi skal vise at $[f]_\beta$ faktisk er diagonal.

Observér at
- $\|f(\bar{e}_1)\|^2 = |a_{1,1}|^2$
- $\|f^*(\bar{e}_1)\|^2 = |a_{1,1}|^2 + |a_{1,2}|^2 + \dots + |a_{1,n}|^2$

Men $f$ er normal, så $\|f(\bar{e}_1)\| = \|f^*(\bar{e}_1)\|$ (Proposisjon fra V22)

$\Rightarrow a_{1,2} = \dots = a_{1,n} = 0$.

Observér nå at
- $\|f(\bar{e}_2)\|^2 = |a_{2,2}|^2$
- $\|f^*(\bar{e}_2)\|^2 = |a_{2,2}|^2 + |a_{2,3}|^2 + \dots + |a_{2,n}|^2$

$\overset{f \text{ normal}}{\Longrightarrow} a_{2,3} = \dots = a_{2,n} = 0$

Til slutt får vi $a_{i,j} = 0 \ \forall\ i \neq j$. $\square$

# DET REELLE SPEKTRALTEOREMET

## TEOREM

La $V$ være et reelt indreproduktrom med $\dim V < \infty$ og la $f$ være en lineær operator på $V$.
De følgende påstandene er ekvivalente:

(a) $f$ er selv-adjungert.

(b) $V$ har en ortonormal basis som består av egenvektorer for $f$.

(c) Det finnes en ortonormal basis $\beta$ for $V$ som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal.

## BEVIS

(b) ⇒ (c) er lett/kjent igjen.

(c) ⇒ (a): Hvis $[f]_\beta$ er diagonal, så er $[f]_\beta^T = [f]_\beta$, som betyr $f^* = f$.

(a) ⇒ (b): Kommer som (omfattende) samarbeidsoppgave. $\square$