V21

ORTOGONAL PROJEKSJON & MINIMERINGSPROBLEMER

DEF

Det ortogonale komplementet til en delmengde $U \subset V$ er

$$U^\perp := \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{u} \in U \}$$

Alltid et underrom av V!

EKSEMPEL

U en linje : $\mathbb{R}^3 \Rightarrow U^\perp$ er planet som går gjennom origo og er perpendikulær til U.

PROPOSISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \qquad \text{med } \bar{u} \in U \text{ og } \bar{w} \in U^{\perp}$$

på en entydig måte.

PROPOSISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^{\perp}$

på en entydig måte.

BEVIS

Eksistens av $\bar{u}$ og $\bar{w}$:

PROPOSISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med } \bar{u} \in U \text{ og } \bar{w} \in U^{\perp}$$

på en entydig måte.

BEVIS

Eksistens av $\bar{u}$ og $\bar{w}$:

La $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ være en ortonormal basis for U.
Vi har selvsagt

$$\bar{v} = \underbrace{\langle v, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_m \rangle \bar{e}_m}_{:= \bar{u}} + \underbrace{\bar{v} - \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}, \bar{e}_m \rangle \bar{e}_m}_{:= \bar{w}}$$

PROPOSISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med } \bar{u} \in U \text{ og } \bar{w} \in U^\perp$$

på en entydig måte.

BEVIS

Eksistens av $\bar{u}$ og $\bar{w}$:

La $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ være en ortonormal basis for U. Vi har selvsagt

$$\bar{v} = \underbrace{\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_m \rangle \bar{e}_m}_{:= \bar{u}} + \underbrace{\bar{v} - \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}, \bar{e}_m \rangle \bar{e}_m}_{:= \bar{w}}$$

Det er klart at $\bar{u} \in U$.

Siden $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ er ortonormal, har vi:

$$\langle \bar{w}, \bar{e}_j \rangle = \langle \bar{v}, \bar{e}_j \rangle - \langle \bar{v}, \bar{e}_j \rangle = 0 \quad \text{for hver } 1 \leq j \leq m,$$

altså $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)^\perp = U^\perp$.

PROPOSISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^{\perp}$

på en entydig måte.

BEVIS

Entydighet av $\bar{u}$ og $\bar{w}$:

PROPOSISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med } \bar{u} \in U \text{ og } \bar{w} \in U^\perp$$

på en entydig måte.

BEVIS

Entydighet av $\bar{u}$ og $\bar{w}$:

Anta at $\bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$; $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$, $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in U^\perp$

Da er

$$\underbrace{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}_{\in U} = \underbrace{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}_{\in U^\perp}$$

Samarbeidsoppgaver (19)!

Siden $U \cap U^\perp = \{\bar{0}\}$, får vi $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ og $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$. $\square$

DEFINISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom.
Den ortogonale projeksjonen av V på U er operatoren $P_U : V \longrightarrow V$ gitt som følger:

For $\bar{v} \in V$, skriv $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$, $\bar{w} \in U^{\perp}$.
Da er $P_U(\bar{v}) = \bar{u}$.

DEFINISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Den ortogonale projeksjonen av V på U er operatoren $P_U : V \longrightarrow V$ gitt som følger:

For $\bar{v} \in V$, skriv $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$, $\bar{w} \in U^{\perp}$.

Da er $P_U(\bar{v}) = \bar{u}$.

EKSEMPEL / HUSK

La $U = \text{span}(\bar{x})$ for en $\bar{0} \neq \bar{x} \in V$. Da er

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2}\bar{x}}_{\in U} + \underbrace{\left(\bar{v} - \frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2}\bar{x}\right)}_{\in U^{\perp}}$$

Altså er

$$P_U(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2}\bar{x}$$

DEFINISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Den ortogonale projeksjonen av V på U er operatoren $P_U : V \longrightarrow V$ gitt som følger:

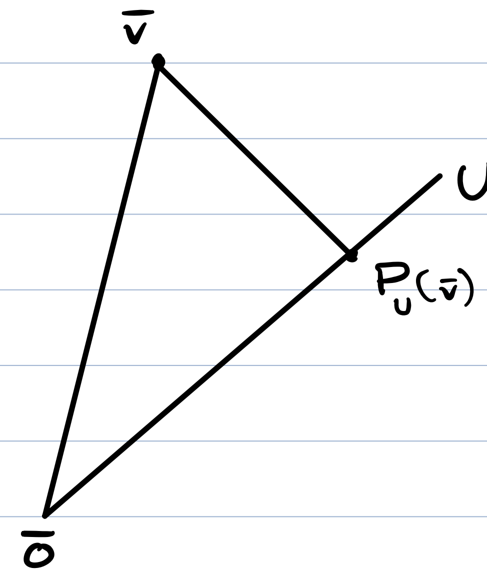
For $\bar{v} \in V$, skriv $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$, $\bar{w} \in U^\perp$.

Da er $P_U(\bar{v}) = \bar{u}$.

EKSEMPEL / HUSK

La $U = \text{span}(\bar{x})$ for en $\bar{0} \neq \bar{x} \in V$. Da er

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2} \bar{x}}_{\in U} + \underbrace{\left(\bar{v} - \frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2} \bar{x} \right)}_{\in U^\perp}$$



Altså er

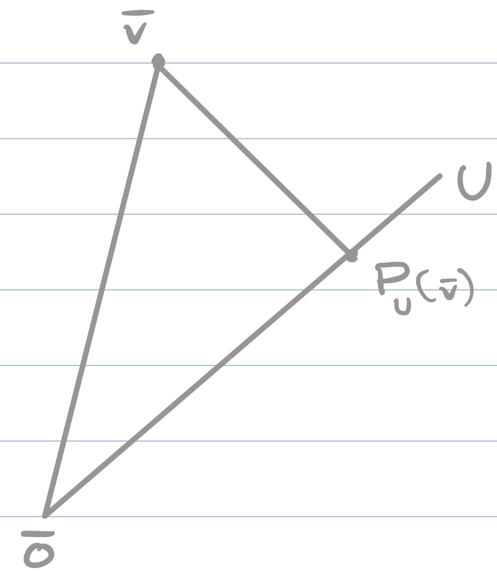
$$P_U(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2} \bar{x}$$

Dette gjorde vi allerede i videoen V18!

MINIMERINGSPROBLEMER

GENERELT MÅL

Gitt et underrom $U \subset V$ og et punkt $\bar{v} \in V$, finn et punkt $\bar{u} \in U$ slik at $\|\bar{v} - \bar{u}\|$ er så liten som mulig.



MINIMERINGSPROBLEMER

GENERELT MÅL

Gitt et underrom $U \subset V$ og et punkt $\bar{v} \in V$, finn et punkt $\bar{u} \in U$ slik at $\|\bar{v} - \bar{u}\|$ er så liten som mulig.

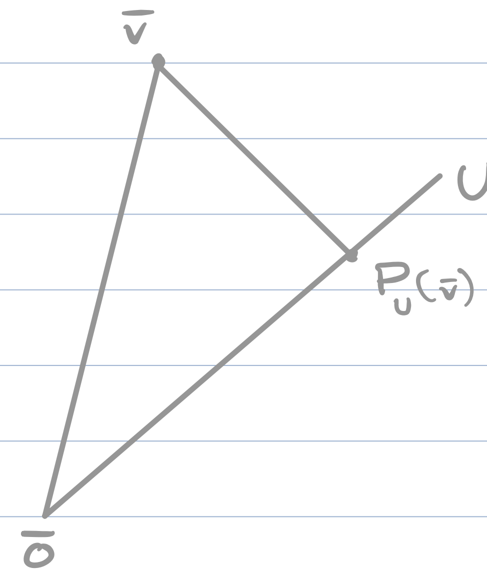
TEOREM

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom, og la $\bar{u} \in U$, $\bar{v} \in V$. Da er

$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{u}\|,$$

og dette er en likhet

$\iff \bar{u} = P_U(\bar{v})$.



MINIMERINGSPROBLEMER

GENERELT MÅL

Gitt et underrom $U \subset V$ og et punkt $\bar{v} \in V$, finn et punkt $\bar{u} \in U$ slik at $\|\bar{v} - \bar{u}\|$ er så liten som mulig.

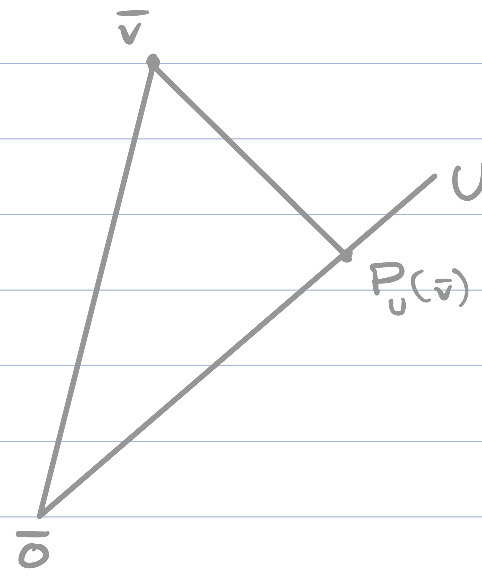
TEOREM

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom, og la $\bar{u} \in U$, $\bar{v} \in V$. Da er

$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{u}\|,$$

og dette er en likhet

$$\Leftrightarrow \bar{u} = P_U(\bar{v}).$$



BEVIS

$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\|^2 \leq \|\bar{v} - P_U(\bar{v})\|^2 + \overbrace{\|P_U(\bar{v}) - \bar{u}\|^2}^{\geq 0}$$

$$= \|(\bar{v} - P_U(\bar{v})) + (P_U(\bar{v}) - \bar{u}\|^2$$

Pythagoras ($\bar{v} - P_U(\bar{v}) \in U^{\perp}$, $P_U(\bar{v}) - \bar{u} \in U$)

$$= \|\bar{v} - \bar{u}\|^2.$$

Den siste påstanden er klar. $\square$