V19

Ortonormal basis og Gram-Schmidt

Def

En mengde vektorer i V er ortogonal hvis hver av vektorene er ortogonal til alle de andre vektorene i mengden.

Hvis hver vektor i tillegg har norm lik 1, så kalles mengden ortonormal.

Proposisjon

La $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \subset V$ være en ortonormal mengde.

i) $\|a_1\bar{e}_1 + \dots + a_m\bar{e}_m\| = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$ for alle skalarer $a_1, \dots, a_m \in F$

ii) $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ er lineært uavhengig i V.

Bevis

Samarbeidsoppgave! $\square$

DEF

En **ortonormal basis** for V er en basis for V som også er en ortonormal mengde.

KOROLLAR

Anta at $\dim V < \infty$. Enhver ortonormal mengde med $\dim V$ vektorer, er en ortonormal basis for V. $\square$

TEOREM (!)

La $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ være en ortonormal basis for V.
For hver $\bar{v} \in V$ er da

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_m \rangle \bar{e}_m$$

og

$$\|\bar{v}\|^2 = |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_m \rangle|^2 .$$

BEVIS

Samarbeidsoppgave! $\square$

TEOREM (GRAM–SCHMIDT-PROSESSEN)

La $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ være lineært uavhengig i V. Definér

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}; \quad \bar{e}_j = \frac{\bar{v}_j - \langle \bar{v}_j, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_j, \bar{e}_{j-1} \rangle \bar{e}_{j-1}}{\|\bar{v}_j - \langle \bar{v}_j, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_j, \bar{e}_{j-1} \rangle \bar{e}_{j-1}\|} \quad (2 \leq j \leq n)$$

Da holder

(a) $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ er en ortonormal mengde i V og

(b) $\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$.

BEVIS

Vi bruker induksjon på j. Tilfellet $j=1$ holder opplagt

Anta nå at $1 < j < n$ og at

(*) $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{j-1}$ er en ortonormal mengde og

(**) $\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{j-1}) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1})$.

Merk at $\bar{v}_j \notin \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}) \overset{(**)}{=} \text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{j-1})$, så vi deler ikke på null i definisjonen av $\bar{e}_j$.

Det er også klart at $\|\bar{e}_j\| = 1$.

For hver $k \in \{1, \dots, j-1\}$ har vi:

$$\langle \bar{e}_j , \bar{e}_k \rangle = \left\langle \frac{\bar{v}_j - \langle \bar{v}_j , \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_j , \bar{e}_{j-1} \rangle \bar{e}_{j-1}}{\| \bar{v}_j - \langle \bar{v}_j , \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_j , \bar{e}_{j-1} \rangle \bar{e}_{j-1} \|} , \bar{e}_k \right\rangle$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\langle \bar{v}_j , e_k \rangle - \langle \bar{v}_j , \bar{e}_k \rangle}{\| \bar{v}_j - \langle \bar{v}_j , \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_j , \bar{e}_{j-1} \rangle \bar{e}_{j-1} \|} = 0 ,$$

så (a) holdes.

Fra definisjonen av $\bar{e}_j$ er det klart at $\bar{v}_j \in \text{span}(\bar{e}_1 , \dots , \bar{e}_j)$, som sammen med antagelsen (**) gir

$$A = \text{span}(\bar{v}_1 , \dots , \bar{v}_j) \subset \text{span}(\bar{e}_1 , \dots , \bar{e}_j) = B$$

Siden både $\bar{v}_1 , \dots , \bar{v}_j$ og $\bar{e}_1 , \dots , \bar{e}_j$ er lineært uavhengige, er både A og B underrom av dimensjon lik j. Derfor er $A = B$, så (b) holder $\square$

KOROLLAR

La V være et indreproduktrom med $\dim V < \infty$.

a) V har en ortonormal basis

b) Enhver ortonormal mengde i V kan utvides til en ortonormal basis for V.

BEVIS

Samarbeidsoppgave! $\square$

EKSEMPEL

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har et indreprodukt gitt ved $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$.

Vi brukes Gram-Schmidt på basisen

$$\{\underset{\bar{v}_1}{\overset{\shortparallel}{1}},\ \underset{\bar{v}_2}{\overset{\shortparallel}{x}},\ \underset{\bar{v}_3}{\overset{\shortparallel}{x^2}}\}:$$

- $\|\bar{v}_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{e}_1 = \sqrt{1/2}}}$

- $\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 = x - \langle x, \sqrt{1/2} \rangle \sqrt{1/2}$

$$= x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx = x,$$

og $\|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \sqrt{2/3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{e}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x}}$

$$\bullet\ \bar{v}_3 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 = x^2 - \langle x^2, \sqrt{1/2} \rangle \sqrt{1/2} - \langle x^2, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x \rangle \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,dx = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$\text{og } \left\| x^2 - \tfrac{1}{3} \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right)\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) dx = \ldots = 8/45$$

$$\Rightarrow \left\| x^2 - \tfrac{1}{3} \right\| = \sqrt{8/45}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{e}_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}}$$