ANVENDELSE: MARKOV-KJEDER

Anta at vi observerer et system som kan "bevege seg" mellom visse "tilstander". Dersom sannsynligheten for at systemet havner i en gitt tilstand kan forutsies basert kun på den forrige tilstanden, så kaller vi prosessen en Markov-kjede.

Eks

I Syracuse, New York, har AVIS tre kontorer/garasjer. Kunden trenger <u>ikke</u> å returnere sin leiebil til den samme garasjen som hun hentet den fra.

		Bil hentes fra		
		1	2	3
Bil returneres til	1	80%	30%	20%
Bil returneres til	2	10%	20%	60%
Bil returneres til	3	10%	50%	20%

DEF

I en Markov-prosess med k mulige tilstander $1, 2, \dots, k$ lar vi:

p_{ij} := sannsynligheten for at systemet havner i tilstand i rett etter at det har vært i tilstand j.

Matrisa

$$P = [p_{ij}]$$

er overgangsmatrisa for Markov-kjeden.

EKS

Overgangsmatrisa for bilutleiefirmaet i Syracuse er

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Eks

En **tilstandsvektor** for en observasjon av en Markov-prosess med k mulige tilstander $1, 2, \ldots, k$ er en kolonnevektor

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

hvor x_i er sannsynligheten for at systemet befinner seg i tilstand i på dette tidspunktet.

Merk

- I matrisa P må summen av elementene i en kolonne være lik 1. En slik matrise kalles **stokastisk**.
- I en tilstandsvektor $\bar{x}$ må summen av elementene være lik 1. En slik vektor kalles en **sannsynlighets-vektor**.

POENGET

Hvis vi kjennes en tilstandsvektor $\bar{x}^{(0)}$ for en Markov-kjede ved et "utgangstidspunkt", så kan vi finne tilstandsvektorene

$$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \ldots, \bar{x}^{(t)}, \ldots$$

for de påfølgende tidspunktene som

$$\bar{x}^{(t)} = P^t \bar{x}^{(0)}.$$

matrisa P opphøyd i t.

DEF

En følge $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ av $r \times s$-matriser **konvergerer** mot $r \times s$-matrisa A dersom

$$\lim_{n \to \infty} (A_n)_{i,j} = A_{i,j} \quad \text{i hver posisjon } (i,j).$$

I dette tilfellet skrives vi: $\lim_{n \to \infty} A_n = A$.

MERK

La $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

- Hvis T er ei $t\times r$-matrise, så er $\lim_{n\to\infty} (TA_n) = TA$.
- Hvis S er ei $s\times t$-matrise, så er $\lim_{n\to\infty} (A_n S) = AS$.

EKS

- La $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Følgen $P, P^2, P^3, \dots, P^k, \dots$ konvergerer ikke, fordi:

$$P = P^3 = P^5 = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad P^2 = P^4 = P^6 = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DEF

Ei overgangsmatrise P er regulær hvis det finnes et heltall n som er slik at $[P^n]_{ij} > 0$ i hver posisjon (i,j).

EKS

- $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ er regulær, siden $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
- $P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ er ikke regulær (enig?).

TEOREM (!)

Hvis P er ei regulær overgangsmatrise, så er

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix} = Q.$$

sannsynlighetsvektor!

$\square$

KOROLLAR

Hvis P er ei regulær overgangsmatrise og $\bar{x}$ er en sannsynlighetsvektor, så er

$$\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} = \bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}$$

for en fiksert sannsynlighetsvektor $\bar{q}$.

BEVIS

Med vår notasjon blir

$$Q\bar{x} = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1x_1 + q_1x_2 + \cdots + q_1x_k \\ q_2x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_2x_k \\ \\ q_kx_1 + q_kx_2 + \cdots + q_kx_k \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}_{=1}\bar{q} = \bar{q}. \quad \square$$

ALTSÅ

I en regulær Markov-kjede vil prosessen nærme seg en fiksert tilstandsvektor $\bar{q}$. Denne kalles **likevektsvektoren** eller den **stasjonære tilstandsvektoren** for Markov-kjeden.

TEOREM

Likevektsvektoren $\bar{q}$ for ei regulær overgangsmatrise P er den entydige sannsynlighetsvektoren som oppfyller

$$P\bar{q} = \bar{q}.$$

BEVIS

Vi har

$$Q = \lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} = P \lim_{n\to\infty} P^n = PQ.$$

Spesielt betyr dette at $P\bar{q} = \bar{q}$, siden hver kolonne i Q er lik $\bar{q}$.

Hvis $\bar{r}$ er en sannsynlighetsvektor med $P\bar{r} = \bar{r}$, så blir $P^n\bar{r} = \bar{r}$ for hver $n \geq 0$, og dermed

$$\bar{r} = \lim P^n \bar{r} = \bar{q}.$$

$\square$

MED ANDRE ORD

For hver sannsynlighetsvektor $\bar{x}$, er $\bar{q} = \lim_{n\to\infty} P^n \bar{x}$ en egenvektor for P tilhørende egenverdien 1.

$\square$

Eks

Husk bilutleiefirmaet med $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

For å finne $\bar{q}$ løser vi $P\bar{q} = \bar{q}$, altså

$$(I - P)\bar{q} = \bar{0}.$$

Dette systemet har generell løsning $\bar{q} = s\begin{pmatrix} 34/13 \\ 14/13 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

For å få en sannsynlighetsvektor må vi la

$$s = \frac{1}{34/13 + 14/13 + 1} = \frac{13}{61},$$

som gir

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} 34/61 \\ 14/61 \\ 13/61 \end{pmatrix}$$

Tolkning: Hvis firmaet eier 1000 biler, så bør det være minst

- 558 parkeringsplasser i garasje 1,
- 230 parkeringsplasser i garasje 2, og
- 214 parkeringsplasser i garasje 3.

MERK

I praksis kan det ofte være mest effektivt å regne ut P^n for en stor n dersom man er ute etter $\bar{q}$.