V14

SETUP:
$f : V \to V$ og $\dim V < \infty$.

DIAGONALISERING

DEFINISJON

f er diagonaliserbar hvis det finnes en basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

ALTERNATIV DEFINISJON

La $\dim V < \infty$.

i) Operatoren $f : V \to V$ er diagonaliserbar

$\Leftrightarrow$

det finnes en ordna basis for V som består av egenvektorer for f.

ii) Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en ordna basis av egenvektorer, så har den diagonale matrisa $[f]_\beta$ egenverdien λ_i (som svarer til $\bar{v}_i$) på plass nummer i på diagonalen.

BEVIS

i) $\Rightarrow$: Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en ordna basis slik at $[f]_\beta = D$ er diagonal, så blir

$$f(\bar{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} D_{ji} \bar{v}_j = \underbrace{D_{ii}}_{\lambda_i} \bar{v}_i,$$

så $\bar{v}_i$ er en egenvektor.

$\Leftarrow$: Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en ordna basis slik at $f(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i$ for $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, så blir

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Husk: Kolonne nummer i i $[f]_\beta$ er koordinatvektoren $[f(\bar{v}_i)]_\beta$.

ii): Dette er klart nå. $\square$

OBSERVASJON

Hvis f er diagonaliserbar, så kan $\text{charpol}_f \in F[x]$ skrives som et produkt av polynomer av grad 1 (charpol_f "splitter").

BEVIS

f diagonaliserbar $\Rightarrow$ $\exists$ basis β slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{charpol}_f = \det([f]_\beta - x \cdot I_n)$$
$$= (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x). \quad \square$$

OBSERVASJON

La $\dim V = n < \infty$. Dersom f har n distinkte egenverdier, så er f diagonaliserbar.

BEVIS

Dette gjør vi i : auditoriet. $\square$

DEF

La λ være en egenverdi for f. Det tilhørende egenrommet er

$$E_\lambda := \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \} \subset V.$$

MERK

$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot id_V)$, så E_λ er et underrom.

DEF

Multiplisiteten $m(\lambda)$ til en egenverdi λ for f er det største tallet slik at

$$(x-\lambda)^{m(\lambda)} \mid \mathrm{charpol}_f .$$

PROPOSISJON

La λ være en egenverdi for f. Da er

$$\dim E_\lambda \leq m(\lambda).$$

BEVIS

Velg en ordna basis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ for E_λ og utvid til en basis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p, \bar{v}_{p+1}, \dots, \bar{v}_n\}$ for V. For $1 \leq i \leq p$ er $\bar{v}_i$ en egenvektor for f som hører til egenverdien λ, så

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_p & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Identitetsmatrisa av størrelse n.

Som i beviset for Cayley–Hamilton, får vi at $\det((\lambda - x) I_p) = (\lambda - x)^p$ er en divisor i charpol_f. Det vil si: $m(\lambda) \geq p = \dim E_\lambda$. $\square$

TEOREM

Hvis f er diagonaliserbar, så er $\dim E_\lambda = m(\lambda)$ for hver egenverdi λ for f.

BEVIS

Anta at f er diagonaliserbar. Da finnes en basis β som består av egenvektorer for f. La $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ være distinkte egenverdier og skriv $\beta_i = \beta \cap E_{\lambda_i}$. La $n_i = \#\text{vektorer i } \beta_i$. Da er $n_i \leq \dim E_{\lambda_i}$ for hver i, siden vektorene i β_i er lineært uavhengige. Ved forrige PROPOSISJON har vi også $\dim E_{\lambda_i} \leq m(\lambda_i)$.

Merk at $\sum_{i=1}^{k} n_i = \overset{\dim V}{n}$ og $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i)}_{=\text{graden til charpol}_f} = n$, så

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \underset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} \underset{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = n.$$

Dette betyr at $\sum_{i=1}^{k} (m(\lambda_i) - \dim E_{\lambda_i}) = 0$, hvilket gir $m(\lambda_i) = \dim E_{\lambda_i}$ for hver $1 \leq i \leq k$ (husk at $m(\lambda_i) - \dim E_{\lambda_i} \geq 0$ ved forrige PROPOSISJON). $\square$

TEOREM

Anta at $\mathrm{charpol}_f$ splitter, og la $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ være de distinkte egenverdiene for f. Hvis $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ for hver $1 \le i \le k$, så er f diagonaliserbar.

BEVIS

Hvis β_i er en basis for E_{λ_i}, så er mengden $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k \subset V$ lineært uavhengig (oppgave). Hvis $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ for hver i, så er antallet vektorer i β lik

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = \sum m(\lambda_i) = \dim V.$$

(Husk beviset for forrige TEOREM.)

Det vil si at β er en (ordna) basis for V, og β består av egenvektorer for f. $\square$

OPPSUMMERING

La $\dim V < \infty$ og la $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ være de distinkte egenverdiene for f. Da er f diagonaliserbar $\iff \dim V = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_m}$.

GJØR SELV