V9

ANVENDELSE:

HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENSIALLIGNINGER (MED KONSTANTE KOEFFISIENTER)

OPPSETT

Vi skal løse ligninger av typen

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

hvor

- $y^{(i)}$ er den i-te deriverte av $y = y(t)$,
- $a_0, \dots, a_n$ er konstanter.

MERK

Hvis $a_n \neq 0$, så kan vi anta at $a_n = 1$.

(Løsningene av $(*)$ er de samme som løsningene av $y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} y^{(1)} + \frac{a_0}{a_n} y = 0.$)

VÅRT PERSPEKTIV

Tenk på løsningene av $(*)$ som et vektorrom!

Men hvilket vektorrom?

- Det er bekvemt å betrakte løsningene av $(*)$ som funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Altså er vi i (det enorme) vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$.

- Man kan vise at enhver løsning av (*) har deriverte av alle ordener. Altså trenger vi bare å lete etter løsninger i underrommet
$$C^\infty := \{ f \mid f^{(k)} \text{ eksisterer } \forall\, k \geq 0 \} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$
Vi kan beskrive løsningene av (*) som vektorene i kjernen til en lineær operator på C^∞!

DEF

Til ligninga $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$ assosierer vi polynomet
$$p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

KONSTRUKSJON

Funksjonen $D : C^\infty \longrightarrow C^\infty$ gitt ved $D(f) = f'$ er lineær (sjekk). Derfor er uttrykket
$$p(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0\, \mathrm{id}_{C^\infty}$$
en lineær operator på C^∞. Merk at

- $D^i = D \circ D \circ \dots \circ D$
- $+$ er sum av funksjoner

Nå er poenget at ligninga
$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$
er den samme som
$$0 = (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0\, \mathrm{id})(y)$$
$$= p(D)(y).$$

OBSERVASJON

Mengden av alle løsninger av en homogen lineær differensialligning med konstante koeffisienter er nøyaktig kjernen $\operatorname{Ker} p(D)$ til den lineære operatoren $p(D) : C^\infty \to C^\infty$, hvor $p(t)$ er polynomet til ligninga $\square$

DEF

Løsningsrommet til ligninga er kjernen til $p(D)$.

NYTT MÅL

Finne en vektorromsbasis for $\operatorname{Ker} p(D)$!

TEOREM (!)

$\dim(\operatorname{Ker} p(D)) = \deg p \ (= n)$. $\square$

Deler kommer som oppgaver!

ALTSÅ

For å finne en basis for løsningsrommet trenger vi bare n lineært uavhengige løsninger !

Husk (ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM)

Polynomet p kan skrives

$$p(t) = (t-c_1)(t-c_2) \cdots (t-c_n)$$

for $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Hva hvis $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c$?

- Hver vektor i mengden

$$B = \{ e^{ct}, t e^{ct}, t^2 e^{ct}, \ldots, t^{n-1} e^{ct} \}$$

er en løsning av ligninga (*) (sjekk).

- Mengden B er lineært uavhengig i C^∞:

Anta nemlig at

$$b_0 e^{ct} + b_1 t e^{ct} + \cdots + b_{n-1} t^{n-1} e^{ct} = 0$$

for skalarer $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Ved å dele på e^{ct} får vi:

$$b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1} t^{n-1} = 0,$$

altså null-polynomet, så $b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0$.

Det vil si at B er en basis for løsningsrommet til differensialligninga.

Hva hvis $c_i \neq c_j \quad \forall \quad i \neq j$?

- Hver vektor i mengden
  $B = \{e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, \ldots, e^{c_n t}\}$
  er en løsning av ligninga $(*)$ (sjekk).
- Mengden B er lineært uavhengig i C^∞:

Anta at

$$b_1 e^{c_1 t} + \ldots + b_n e^{c_n t} \overset{(\dagger)}{=} 0.$$

Vi bruker induksjon på n for å vise at hver $b_i = 0$:

+ Tilfellet $n=1$ er klart
+ Anta at vi har vist påstanden for $n-1$ summander. Hvis vi bruker den lineære operatoren $D - c_n \cdot id$ på $(\dagger)$, så får vi:

$$\begin{aligned}
0 &= (D - c_n \cdot id)(b_1 e^{c_1 t} + \ldots + b_n e^{c_n t}) \\
&= D(b_1 e^{c_1 t} + \ldots + b_n e^{c_n t}) \\
&\quad - (c_n b_1 e^{c_1 t} + \ldots + c_n b_n e^{c_n t}) \\
&= c_1 b_1 e^{c_1 t} + \ldots + \cancel{c_n b_n e^{c_n t}} \\
&\quad - c_n b_1 e^{c_1 t} - \ldots - \cancel{c_n b_n e^{c_n t}} \\
&= (c_1 - c_n) b_1 e^{c_1 t} + \ldots + (c_{n-1} - c_n) b_{n-1} e^{c_{n-1} t}.
\end{aligned}$$

Vi har $c_i - c_n \neq 0 \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n-1$, så induksjonshypotesen gir $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$, som innsatt i $(\dagger)$ gir at også $b_n = 0$.

Det vil si at mengden B er en basis for løsningsrommet!

TEOREM

Hvis en homogen og lineær differensialligning med konstante koeffisienter har sitt polynom på formen

$$(t-c_1)^{n_1}(t-c_2)^{n_2} \dots (t-c_k)^{n_n}$$

med distinkte $c_i \in \mathbb{C}$, så er

$$\{e^{c_1 t}, te^{c_1 t}, \dots, t^{n_1-1}e^{c_1 t}, \dots, e^{c_k t}, te^{c_k t}, \dots, t^{n_k-1}e^{c_k t}\}$$

en basis for løsningsrommet til ligninga. $\square$

EKSEMPEL

Ligninga $y'' - 5y' - 6y = 0$ har polynomet

$$t^2 - 5t - 6 = (t-6)(t+1),$$

som har røttene 6 og -1. En vilkårlig løsning av ligninga er derfor på formen

$$y = c_1 e^{6t} + c_2 e^{-t}.$$