V5

LINEÆRTRANSFORMASJONER

DEF

En lineærtransformasjon fra V til W er en funksjon $f: V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \qquad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in V$$
$$f(a\bar{v}) = a f(\bar{v}) \qquad \forall\ \bar{v} \in V,\ a \in F.$$

En lineærtransformasjon $V \longrightarrow V$ kales en lineær operator.

EKS

Null-funksjonen $0 : V \to W$ gitt ved
$$0(\bar{v}) = \bar{0} \quad \forall\ \bar{v} \in V$$
er lineær.

EKS

La M være en $m\times n$-matrise over $\mathbb{R}$.
Da er $L_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gitt ved
$L_M(\bar{v}) = M\bar{v}$ en lineærtransformasjon.

(Vi har regnet med matriser og vektorer i MA1201, og vet at
$$L_M(\bar{u}+\bar{v}) = M(\bar{u}+\bar{v}) = M\bar{u}+M\bar{v} = L_M(\bar{u}) + L_M(\bar{v})$$
$$L_M(a\bar{v}) = M(a\bar{v}) = a(M\bar{v}) = aL_M(\bar{v}).)$$

Eks

Derivasjon $D: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, altså $D(f) = f'$, er lineær.

(Vi vet fra analysen at
$(f+g)' = f' + g'$ og $(\lambda f)' = \lambda f'$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.)

Eks

Integrasjon er en lineærtransformasjon, dvs.
$T: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ gitt ved $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

(Vi vet fra analysen at
$$\int_0^1 (f(x)+g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$$
og at $\lambda \int_0^1 f(x)\,dx = \int \lambda f(x)\,dx$.)

Eks

Projeksjon er en lineærtransformasjon, for eksempel $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved
$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1, x_3)$.

(Vi sjekker enkelt at
$$f((x_1,x_2,x_3,x_4) + (y_1,y_2,y_3,y_4))$$
$$= f((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4))$$
$$= (x_1+y_1, x_3+y_3)$$
$$= (x_1, x_3) + (y_1, y_3)$$
$$= f((x_1,x_2,x_3,x_4)) + f((y_1,y_2,y_3,y_4)).)$$

$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ er like enkelt å sjekke.

TEOREM

La $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ være en basis for V og la $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n \in W$ være vilkårlige. Det eksisterer nøyaktig en lineærtransformasjon $f: V \to W$ slik at $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \;\; \forall \; i = 1, \dots, n.$

MED ANDRE ORD

En lineærtransformasjon er entydig bestemt av hvordan den virker på en basis.

BEVIS

- f eksisterer: Definér $f: V \to W$ ved

$$f(\underbrace{c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n}_{\text{Enhver vektor i } V \text{ er på denne formen!}}) = c_1\bar{w}_1 + \dots + c_n\bar{w}_n \quad \forall \, c_i \in F.$$

Det er klart at $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \quad \forall \; i = 1, \dots, 2.$
f er også lineær: Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in V$, så er
$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$ og $\bar{v} = b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n$,
og dermed

$$\begin{aligned}
f(\bar{u} + \bar{v}) &= f((a_1+b_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_n+b_n)\bar{v}_n) \\
&= (a_1+b_1)\bar{w}_1 + \dots + (a_n+b_n)\bar{w}_n \\
&= (a_1\bar{w}_1 + \dots + a_n\bar{w}_n) + (b_1\bar{w}_1 + \dots + b_n\bar{w}_n) \\
&= f(\bar{u}) + f(\bar{v}).
\end{aligned}$$

For $a \in F$ får vi:

$$\begin{aligned}
f(a\bar{v}) &= f(ab_1\bar{v}_1 + \dots + ab_n\bar{v}_n) \\
&= ab_1\bar{w}_1 + \dots + ab_n\bar{w}_n \\
&= a(b_1\bar{w}_1 + \dots + b_n\bar{w}_n) = a f(\bar{v}).
\end{aligned}$$

• **f er entydig**: La $g: V \to W$ være lineær og anta at $g(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \quad \forall\ i = 1, \dots, 2.$

Da får vi, for vilkårlig $\bar{v} = b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n \in V$,

g er lineær

$$\begin{aligned} g(\bar{v}) &= g(b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n) \\ &= g(b_1\bar{v}_1) + \dots + g(b_n\bar{v}_n) \\ &= b_1 g(\bar{v}_1) + \dots + b_n g(\bar{v}_n) \\ &= b_1\bar{w}_1 + \dots + b_n\bar{w}_n = f(\bar{v}), \end{aligned}$$

altså $g = f$. $\square$