Grunngi alle svarene dine.

Oppgave 1. I en liten by selger Solveig og Tuva lemonade fra hver sin kiosk. Det viser seg at 60% av kundene som sist gikk til Solveig også går til Solveig neste gang, mens 40% av dem går til Tuva neste gang. Av de som sist gikk til Tuva, går 30% til Solveig for sin neste lemonade, mens 70% går til Tuva igjen.

Hvor mange prosent av innbyggerne går til Tuva sin lemonadekiosk på lang sikt?

Oppgave 2. La x og y være reelle tall og se på matrisa

$$A = \begin{pmatrix} x & y-x \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Finn et pent uttrykk for matrisa A^k for hver $k \geq 1$.

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\,\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Finn en ortonormal basis for V.

(b) Vektoren

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ligger i underrommet V. Skriv $\bar{v}$ som en lineærkombinasjon av vektorene i den ortonormale basisen du fant i (a).

Oppgave 4. I denne oppgaven er V det reelle vektorrommet som består av alle funksjoner $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. For hver $a \in \mathbb{R}$ har vi delmengden

$$V_a = \{f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = a\} \subset V.$$

(a) Vis at $V_0 \subset V$ er et underrom (altså, at V_a er et underrom av V hvis $a = 0$).

(b) Er $V_1 \subset V$ et underrom?

Oppgave 5. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$ og la f være en diagonaliserbar lineær operator på V med karakteristisk polynom

$$t^2(t-3)(t+2)^2(t-4)^3.$$

- Hva er dimensjonen til V, altså tallet $\mathsf{dim}\,V$?
- Hva er dimensjonen til kjernen til f, altså tallet $\mathsf{dim}(\mathsf{Ker}\,f)$?

Oppgave 6. Det reelle vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ består av alle polynomer av grad høyst 3 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La D være den lineære operatoren på $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ gitt ved derivasjon, altså

$$D(p(x)) = p'(x)$$

for hver $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(a) La $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Finn matrisa $[D]_\beta$. (Du skal *ikke* vise at β er en basis eller at D er lineær).

(b) Finn dimensjonen til bildet til D, altså tallet $\mathsf{dim}(\mathsf{Im}\, D)$, og finn dimensjonen til kjernen til D, altså tallet $\mathsf{dim}(\mathsf{Ker}\, D)$.

(c) Finnes det en basis γ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ som er slik at matrisa $[D]_\gamma$ er inverterbar?

Oppgave 7. For en lineær operator f på et vektorrom V skriver vi

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ kopier av } f}$$

og sier at f er *nilpotent* hvis det finnes et naturlig tall $n \geq 1$ slik at $f^n = \mathcal{O}$. (Her står $\mathcal{O}$ for nulloperatoren på V, det vil si at $\mathcal{O}(\bar{v}) = \bar{0}$ for hver $\bar{v} \in V$.)

(a) Gi et eksempel på et vektorrom V med en nilpotent lineær operator $f \neq \mathcal{O}$.

Nå lar vi V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

(b) Vis at hvis f er nilpotent så er hver egenverdi for f lik 0.

(c) Vis at hvis f er nilpotent og normal, så er $f = \mathcal{O}$.
Vink: Her kan du bruke resultatet fra (b) selv om du ikke har løst oppgaven.