GRUPPEARBEID (24)

Oppgave 1. Vis at det ikke finnes noen selv-adjungert lineær operator f på $\mathbb{R}^3$ (med euklidsk indreprodukt) slik at

$$f(1,2,3) = (0,0,0) \text{ og } f(2,5,7) = (2,5,7).$$

Oppgave 2. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$ med en lineær operator f. Vis at V har en basis av egenvektorer for f hvis og bare hvis det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selv-adjungert operator.

Oppgave 3. Bevis eller motbevis følgende påstand.

La s være en lineær operator på et indreproduktrom V, og anta at det finnes en ortonormal basis $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ for V som er slik at $||\bar{s}(e_i)|| = 1$ for hver $1 \leq i \leq n$. Da er s en isometri.

Oppgave 4. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$ med en lineær operator s. Vis at de følgende utsagnene er ekvivalente.

(i) s er en isometri.

(ii) Det finnes en ortonormal basis for V som består av egenvektorer for s slik at de hver av de tilhørende egenverdiene har absoluttverdi lik 1.

Oppgave 5. La f være en normal lineær operator på et indreproduktrom V. Vis at

$$\mathsf{Ker}(f^n) = \mathsf{Ker}\, f$$

for hver $n \geq 1$.

Oppgave 6. Gitt et reelt indreproduktrom V med en selv-adjungert operator f, en $\lambda \in \mathbb{R}$ og en $\varepsilon > 0$. Vis at hvis det finnes en vektor $\bar{v} \in V$ slik at

$$||\bar{v}|| = 1 \text{ og } ||f(\bar{v}) - \lambda\bar{v}|| < \varepsilon,$$

så har f en egenverdi λ' som er slik at $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

Oppgave 7. La V være et reelt indreproduktrom. Vis at

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{||\bar{u} + \bar{v}||^2 - ||\bar{u} - \bar{v}||^2}{4}$$

for hver $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

Oppgave 8. La V være et komplekst indreproduktrom. Vis at

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{||\bar{u} + \bar{v}||^2 - ||\bar{u} - \bar{v}||^2 + ||\bar{u} + i\bar{v}||^2 i - ||\bar{u} - i\bar{v}||^2 i}{4}$$

for hver $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

Oppgave 9. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med lineære operatorer f og g. Vis at

$$f \circ g = \mathsf{id}_V \iff g \circ f = \mathsf{id}_V.$$