GRUPPEARBEID (23)

Oppgave 1. La β være standardbasisen for $\mathbb{C}^2$ og la $f\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ være slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finn en ortonormal basis γ for $\mathbb{C}^2$ som er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal.

Oppgave 2. La β være standardbasisen for $\mathbb{R}^3$ og la $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Finn en ortonormal basis γ for $\mathbb{R}^3$ som er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal.

Oppgave 3. Finnes det en lineær operator f på $\mathbb{R}^3$ som er slik at

- f ikke er selv-adjungert (med hensyn på det euklidske indreproduktet) *og*
- det finnes en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for f?

Grunngjev svaret ditt.

Oppgave 4. La f være en selv-adjungert lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$. Vis at hver egenverdi for f er et reelt tall.

Oppgave 5. La f være en normal lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selv-adjungert} \iff f \text{ har kun reelle egenverdier.}$$

Oppgave 6. La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selv-adjungert} \iff \langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle \in \mathbb{R} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

Oppgave 7 (Utfordring)**.** La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$. Vis at enhver normal operator på V har en kvadratrot.
(En operator s på V kalles en *kvadratrot* av en operator f på V hvis $s^2 = f$.)

Oppgave 8 (Utfordring)**.** La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Er det sant at enhver selv-adjungert operator på V har en tredjerot?
(En operator s på V kalles en *tredjerot* av en operator f på V hvis $s^3 = f$.)

Oppgave 9. I denne oppgaven skal vi etablere det reelle spektralteoremet. Vi deler beviset opp i en rekke hjelperesultater.

Stående antagelse: I Oppgave 9.1–9.3 er

- V et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{R}$ og
- f en selv-adjungert lineær operator på V.

Oppgave 9.1 (Inverterbare kvadratiske uttrykk)**.** La $b, c \in \mathbb{R}$ være slik at $b^2 < 4c$. Vis at operatoren

$$f^2 + bf + c \cdot \mathsf{id}_V$$

er inverterbar.

Oppgave 9.2 (Selv-adjungerte operatorer har egenverdier)**.** Vis at hvis $V \neq \{\bar{0}\}$ så har f en egenverdi.

Oppgave 9.3 (Selv-adjungerte operatorer og invariante underrom)**.** La $U \subset V$ være et underrom som er invariant under f. Vis at

(1) underrommet $U^\perp$ er invariant under f,

(2) operatoren $f|_U$ på U er selv-adjungert og

(3) operatoren $f|_{U^\perp}$ på $U^\perp$ er selv-adjungert.

Det reelle spektralteoremet. *La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{R}$. De følgende påstandene er ekvivalente.*

(1) f er selv-adjungert.

(2) V har en ortonormal basis som består av egenvektorer for f.

(3) Det finnes en ortonormal basis β for V som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal.