GRUPPEARBEID (19)

Oppgave 1. La $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ være en ortonormal mengde i et indreproduktrom V.

(a) Vis at
$$||a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n||^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2$$
for alle skalarer $a_1, \ldots a_n \in F$.

(b) Vis at $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ er lineært uavhengig i V.

(c) Vis at
$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \ldots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n$$
for hver $\bar{v} \in \mathsf{span}\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$.

Oppgave 2. La V være et indreproduktrom med $\mathsf{dim}\, V < \infty$.

(a) Vis at V har en ortonormal basis.

(b) Vis at enhver ortonormal mengde i V kan utvides til en ortonormal basis for V.

Oppgave 3. La vektorrommet $\mathbb{C}^3$ ha det euklidske indreproduktet og se på basisen
$$\beta = \{(i, i, i),\ (0, i, i),\ (0, 0, i)\}\,.$$
Bruk Gram–Schmidt-prosessen på β slik at du får en ortonormal basis for $\mathbb{C}^3$.

Oppgave 4. Hva skjer hvis vi prøver å bruke Gram–Schmidt-prosessen på en lineært avhengig mengde?

Oppgave 5. La θ være et reelt tall og se på de to delmengdene
$$\beta_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\} \text{ og } \beta_2 = \{(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, -\cos\theta)\}$$
i vektorrommet $\mathbb{R}^2$.

(a) Vis at både β_1 og β_2 er ortonormale basiser for $\mathbb{R}^2$.

(b) Vis at *enhver* ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ er på formen β_1 eller β_2.

Oppgave 6. La V være et indreproduktrom med $\bar{u} \in V$. Vis at

(a) funksjonen
$$\langle -, \bar{u} \rangle : V \longrightarrow F$$
gitt ved $\langle -, \bar{u} \rangle(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$ for hver $\bar{v} \in V$ er en lineærtransformasjon og at

(b) $\langle \bar{u}, \bar{0} \rangle = \langle \bar{0}, \bar{u} \rangle = 0$.

La $\bar{v}, \bar{w} \in V$ og $c \in F$. Vis at

(c) $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$ og at

(d) $\langle \bar{u}, c\bar{v} \rangle = \bar{c} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

Oppgave 7. La V være et indreproduktrom med $\bar{v} \in V$ og $c \in F$. Vis at

(a) $||\bar{u}|| = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$ og at

(b) $||c\bar{u}|| = |c|||\bar{u}||$.

Oppgave 8. La V være et indreproduktrom med delmengder $U, W \subset V$. Vis at

(a) $U^{\perp}$ er et underrom av V,

(b) $U \cap U^{\perp} \subset \{\bar{0}\}$,

(c) $U \subset W \implies U^{\perp} \subset W^{\perp}$,

(d) $\{\bar{0}\}^{\perp} = V$ og at

(e) $V^{\perp} = \{\bar{0}\}$.