GRUPPEARBEID (16)

Oppgave 1 (Eksamen 2017).

> **Oppgave 3** En liten by har to restauranter, A og B. Til enhver tid vil 75% av gjestene som sist spiste på A også spise der neste gang de spiser ute, mens 25% av dem spiser på B neste gang. Av gjestene som sist spiste på B, spiser 50% på A neste gang, mens 50% spiser på B igjen.
>
> Hvor mange prosent av gjestene spiser på restaurant A på lang sikt?

Oppgave 2 (Eksamen 2019).

> **Oppgave 4** La
> $$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.25 \\ 0.05 & 0.85 & 0.05 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{pmatrix}.$$
>
> **a)** Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi til matrisen. Finn en basis for egenrommet til $\lambda = 1$. Hva er $\lim_{n\to\infty} M^n$?
>
> Datasystemer inneholder feil. Mange av disse feilene gjør ondsinnede angrep mot systemet mulig, dersom skurker får kunnskap om feilene.
>
> Vi antar at det er tre muligheter for hvem som har kunnskap om disse feilene:
>
> 1. Ingen vet om noen feil. (Systemet er *trygt.*)
> 2. Skurker vet om en eller flere feil. (Systemet er *ekstremt sårbart.*)
> 3. Alle vet om en eller flere feil. (Systemet er *beskyttbart.*)
>
> Hvis ingen vet om noen feil i én uke er det 5 % sannsynlighet for at skurkene finner en feil til neste uke. Det er 15 % sannsynlighet for at noen til neste uke finner en feil og offentliggjør den, uten at den blir rettet.
>
> Når bare skurkene vet om feil i én uke er det 15 % sannsynlighet for at minst én feil blir alment kjent til uken etter.
>
> Når en feil er alment kjent i én uke er det 25 % sannsynlighet for at alle kjente feil er rettet til uken etter (systemet er trygt). Det er 5 % sannsynlighet for at de alment kjente feilene er rettet, men at skurkene kjenner flere feil uken etter.
>
> For et stort system er det rimelig å anta at det er så mange feil at det overstående holder i et lenger tidsrom, og vi kan dermed modellere dette som en Markovkjede.
>
> **b)** Anta at systemet har vært lenge i drift. Gi et begrunnet anslag på hvor mange uker i gjennomsnitt du forventer at systemet er trygt i løpet av et år.

Oppgave 3 (Eksamen 2010).

Oppgave 5 Se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A.

b) Diagonaliser A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3f(x) + g(x) \\ g'(x) &= f(x) + g(x) - h(x) \\ h'(x) &= 2f(x) - 8g(x) + h(x) \end{aligned}$$

Oppgave 4 (Eksamen 2010).

Oppgave 4 La C være vektorrommet bestående av alle kontinuerlige funksjoner på $\mathbb{R}$, og la V og W være underrom med basiser

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V &= \{x, x^2, x + \sin x, \cos x\} \quad \text{(basis for } V\text{)} \\ \mathcal{B}_W &= \{1, x + 4, \sin x, 2x + \cos x\} \quad \text{(basis for } W\text{)} \end{aligned}$$

(du trenger ikke å vise at V og W er underrom av C, og heller ikke at $\mathcal{B}_V$ og $\mathcal{B}_W$ tilfredsstiller kravene til å være basiser). Se på lineærtransformasjonen $T\colon V \to W$ gitt ved

$$T(f(x)) = f'(x) \quad \left(= \frac{d}{dx} f(x)\right)$$

(du trenger ikke å vise at dette er en lineær transformasjon).

a) Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}$ med hensyn på basisene $\mathcal{B}_V$ og $\mathcal{B}_W$. Er T en isomorfi?

b) La v være vektoren

$$v = 2x + 3x^2 + 7 \sin x$$

i V. Finn koordinatvektorene $[v]_{\mathcal{B}_V}$ og $[T(v)]_{\mathcal{B}_W}$.