GRUPPEARBEID (3)

Første time

Oppgave 1. Se på vektorene $\bar{u} = (1, 2, -1), \bar{v} = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$.

(1) Avgjør om vektoren $(9, 2, 7)$ ligger i underrommet $\mathsf{span}(\bar{u}, \bar{v}) \subset \mathbb{R}^3$.

(2) Avgjør om vektoren $(4, -1, 8)$ ligger i underrommet $\mathsf{span}(\bar{u}, \bar{v}) \subset \mathbb{R}^3$.

Oppgave 2. Vis at det reelle vektorrommet

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

er uendeligdimensjonalt.

Oppgave 3. La V være et vektorrom.

(1) Vis at en delmengde $\{\bar{v}\} \subset V$ er lineært avhengig hvis og bare hvis $\bar{v} = \bar{0}$.

(2) Vis at en delmengde $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} \subset V$ er lineært avhengig hvis og bare hvis $\bar{v}_1$ er et skalarmultiplum av $\bar{v}_2$.

(3) Vis at en delmengde $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært avhengig hvis og bare hvis det finnes en $i \in \{1, \dots, n\}$ slik at $\bar{v}_i \in \mathsf{span}\left(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_n\right)$.

Oppgave 4. Sjekk at i vektorrommet $\mathbb{R}[x]$ er

$$\mathsf{span}\left(x^2 + 1, x + 5, x + 4\right) = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

Oppgave 5. Se på de komplekse tallene $z_1 = 1 + i$ og $z_2 = 1 - i$.

(1) Tenk på $\mathbb{C}$ som et vektorrom over $\mathbb{R}$.
Vis at mengden av vektorer $\{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$ er lineært uavhengig.

(2) Tenk på $\mathbb{C}$ som et vektorrom over $\mathbb{C}$.
Vis at mengden av vektorer $\{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$ er lineært avhengig.

Andre time

Oppgave 6. Avgjør om mengden av vektorer

$$\{(2, 16, 4, 2), (-1, 7, 3, 8), (14, 3, 19, -7)\}$$

utspenner vektorrommet $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 7. Avgjør om mengden av vektorer

$$\{(3, 8, 5), (-3, 6, 9), (1, 1, 0), (-4, 2, 9)\}$$

er lineært uavhengig i vektorrommet $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 8.

(1) Finnes det en lineært uavhengig delmengde bestående av ni vektorer i vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 6}$?

(2) Finnes det en delmengde bestående av fire vektorer i vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ som utspenner $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$?

Oppgave 9. La V være et vektorrom med $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \in V$.

(1) Vis at hvis $\mathsf{span}\,(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = V$, så er også

$$\mathsf{span}\,(\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \bar{v}_3 - \bar{v}_4, \bar{v}_4) = V.$$

(2) Vis at hvis mengden $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ er lineært uavhengig i V, så er også

$$\{\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \bar{v}_3 - \bar{v}_4, \bar{v}_4\}$$

lineært uavhengig i V.

Oppgave 10 (Utfordring)**.** La V være vektorrommet (over $\mathbb{R}$) av alle kontinuerlige funksjoner $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Vis at V er uendeligdimensjonalt.