V26

EKSAMEN, VÅR 2022

Definisjon. Et vektorrom V over en kropp $\mathbb{K}$ er en mengde som det er definert to operasjoner på: vektoraddisjon, som definerer for to elementer x og y i V et nytt element $x + y$, og skalarmultiplikasjon, som definerer for $s \in \mathbb{K}$ og et element $x \in V$ et nytt element $sx \in V$, slik at følgende krav er oppfylt:

VS1 For alle $x, y \in V$ gjelder $x + y = y + x$.

VS2 For alle $x, y, z \in V$ gjelder $(x + y) + z = x + (y + z)$.

VS3 Det finnes et element 0 i V slik at $x + 0 = x$ for alle $x \in V$.

VS4 For hvert element $x \in V$ finnes det et element $y \in V$ slik at $x + y = 0$.

VS5 For hvert element $x \in V$ gjelder $1x = x$.

VS6 For hvert par av skalarer s og t i $\mathbb{K}$ og hver $x \in V$ gjelder $(st)x = s(tx)$.

VS7 For hver $s \in \mathbb{K}$ og $x, y \in V$ gjelder $s(x + y) = sx + sy$.

VS8 For hver $s, t \in \mathbb{K}$ og $x \in V$ gjelder $(s + t)x = sx + tx$.

Oppgave 1 I denne oppgaven skal du bruke vektorromsaksiomene. Disse er gjengitt i vedlegget.

a) Vis at 0 fra VS3 er unik.

b) Vis at y fra VS4 er unik.

a) La $\bar{a}, \bar{b} \in V$ tilfredsstille VS3.

Må vise: $\bar{a} = \bar{b}$.

For hver $\bar{v} \in V$ er nå

$$\bar{v} + \bar{a} \underset{\text{VS3}}{=} \bar{v} \underset{\text{VS3}}{=} \bar{v} + \bar{b}. \qquad (*)$$

Spesielt holder $(*)$ for $\bar{v} = \bar{a}$, som gir

$$\bar{a} = \bar{a} + \bar{b} \underset{\text{VS1}}{=} \bar{b} + \bar{a} \underset{\text{VS3.}}{=} \bar{b}$$

$\square$

Oppgave 1 I denne oppgaven skal du bruke vektorromsaksiomene. Disse er gjengitt i vedlegget.

a) Vis at 0 fra VS3 er unik.

b) Vis at y fra VS4 er unik.

b) La $\bar{x} \in V$ og anta at $\bar{y}, \bar{z} \in V$ tilfredsstiller VS4, altså $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0} = \bar{x} + \bar{z}$.
Må vise: $\bar{y} = \bar{z}$.

Nå har vi:

$$(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = (\bar{x}+\bar{z})+\bar{z} = \bar{0}+\bar{z} \overset{VS1}{=} \bar{z}+\bar{0} \overset{VS3}{=} \bar{z}$$

$$\overset{VS2}{\parallel}$$

$$\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$$

$$\overset{VS1}{\parallel}$$

$$\bar{x}+(\bar{z}+\bar{y}) \overset{VS2}{=} (\bar{x}+\bar{z})+\bar{y} = \bar{0}+\bar{y} \overset{VS1}{=} \bar{y}+\bar{0} \overset{VS3}{=} \bar{y}$$

$\square$

Oppgave 2 La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, la W være et underrom og la $y \in V$.

a) i) Forklar hva $W^\perp$ er.

ii) Vis at det finnes unike $w \in W$ og $z \in W^\perp$ slik at $y = w + z$.

b) Vis at w er den vektoren i W som ligger nærmest y.

a) i) $W^\perp$ er de vektorene i V som står ortogonalt på hver vektor i W, altså

$$W^\perp = \{ \bar{x} \in V \mid \langle \bar{w}, \bar{x} \rangle = 0 \quad \forall \ \bar{w} \in W \}.$$

Oppgave 2 La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, la W være et underrom og la $y \in V$.

a) i) Forklar hva $W^\perp$ er.

ii) Vis at det finnes unike $w \in W$ og $z \in W^\perp$ slik at $y = w + z$.

b) Vis at w er den vektoren i W som ligger nærmest y.

a) i) La $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ være en ortonormal basis for W og utvid til en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ for V.

Da er $\{\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n\} \subseteq W^\perp$.

Skriv $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{e}_i$, og la $\bar{w} = \sum_{i=1}^{k} a_i \bar{e}_i$ og $\bar{z} = \sum_{i=k+1}^{n} a_i \bar{e}_i$.

Da er

$$\bar{y} = \bar{w} + \bar{z} \quad \text{med } \bar{w} \in W \text{ og } \bar{z} \in W^\perp,$$

altså har vi vist at $\bar{w}$ og $\bar{z}$ eksisterer.

Oppgave 2 La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, la W være et underrom og la $y \in V$.

a) i) Forklar hva $W^\perp$ er.

ii) Vis at det finnes unike $w \in W$ og $z \in W^\perp$ slik at $y = w + z$.

b) Vis at w er den vektoren i W som ligger nærmest y.

a) ii) Anta nå at $\bar{y} = \bar{w}' + \bar{z}'$ med $\bar{w}' \in W$, $\bar{z}' \in W^\perp$.
Hvis vi kan vise at $\bar{w}' = \bar{w}$ og $\bar{y}' = \bar{y}$, så er vi ferdige.

Men vi har nå at

$$\bar{w} + \bar{z} = \bar{y} = \bar{w}' + \bar{z}'$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{w} - \bar{w}'}_{\in W} = \underbrace{\bar{z}' - \bar{z}}_{\in W^\perp}, \quad \text{så } \bar{w} - \bar{w}' = \bar{0} = \bar{z} - \bar{z}',$$

siden $W \cap W^\perp = \{\bar{0}\}$.

Altså er $\bar{w} = \bar{w}'$ og $\bar{z} = \bar{z}'$ $\square$

Oppgave 2 La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, la W være et underrom og la $y \in V$.

a) Forklar hva $W^{\perp}$ er.

Vis at det finnes unike $w \in W$ og $z \in W^{\perp}$ slik at $y = w + z$.

b) Vis at w er den vektoren i W som ligger nærmest y.

b) Vi skal vise at $\|\bar{y} - \bar{w}\| \leq \|\bar{y} - \bar{v}\|$ for hver $\bar{v} \in W$.

Dette følger fra

Pythagoras

$$\|\bar{y} - \bar{v}\|^2 = \|\underbrace{\bar{y} - \bar{w}}_{\in W^{\perp}} + \underbrace{\bar{w} - \bar{v}}_{\in W}\|^2 = \|\bar{y} - \bar{w}\|^2 + \|\bar{w} - \bar{v}\|^2$$

$$\geq \|\bar{y} - \bar{w}\|^2. \qquad \square$$

Oppgave 3 La

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.125 & 0.625 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

a) Hva betyr det at en overgangsmatrise er regulær?

Hvilke av matrisene A, B og C er regulære?

Matrisen A har egenverdiene 1 og 0.5.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A, eller forklar hvorfor en slik basis ikke finnes.

c) La A være overgangsmatrisen til en Markovkjede, og la $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ være initialtilstanden.

Hva vil tilstanden til systemet gå mot etter lang tid?

Ville en annen verdi for $\vec{p}_0$ gitt et annet svar?

a) En overgangsmatrise M er regulær hvis det finnes en $i>0$ som er slik at M^i har bare positive tall i seg.

A er åpenbart regulær ($i=1$ holder)

B er regulær (B^2 har kun positive tall i seg).

Oppgave 3 La

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.125 & 0.625 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

a) Hva betyr det at en overgangsmatrise er regulær?

Hvilke av matrisene A, B og C er regulære?

Matrisen A har egenverdiene 1 og 0.5.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A, eller forklar hvorfor en slik basis ikke finnes.

c) La A være overgangsmatrisen til en Markovkjede, og la $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ være initialtilstanden.

Hva vil tilstanden til systemet gå mot etter lang tid?

Ville en annen verdi for $\vec{p}_0$ gitt et annet svar?

a) En overgangsmatrise M er regulær hvis det finnes en $i > 0$ som er slik at M^i har bare positive tall i seg.

C er ikke regulær fordi:

$$C^i = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{for hver } i > 0.$$

Oppgave 3 La

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.125 & 0.625 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

a) Hva betyr det at en overgangsmatrise er regulær?

Hvilke av matrisene A, B og C er regulære?

Matrisen A har egenverdiene 1 og 0.5.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A, eller forklar hvorfor en slik basis ikke finnes.

c) La A være overgangsmatrisen til en Markovkjede, og la $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ være initialtilstanden.

Hva vil tilstanden til systemet gå mot etter lang tid?

Ville en annen verdi for $\vec{p}_0$ gitt et annet svar?

b) $$A - I = \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & \quad 1 & \quad 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.125 & -0.375 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & -0.375 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ er en basis for E_1

Matrisa har rang 2

$$A - 0.5I = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad -1 & \quad 0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 1 & \quad -1 \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$ er en basis for $E_{0.5}$

Matrisa har rang 1

Altså er $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for A.

Oppgave 3 La

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.125 & 0.625 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.625 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

a) Hva betyr det at en overgangsmatrise er regulær?

Hvilke av matrisene A, B og C er regulære?

Matrisen A har egenverdiene 1 og 0.5.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A, eller forklar hvorfor en slik basis ikke finnes.

c) La A være overgangsmatrisen til en Markovkjede, og la $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ være initialtilstanden.

Hva vil tilstanden til systemet gå mot etter lang tid?

Ville en annen verdi for $\vec{p}_0$ gitt et annet svar?

Det er klart at enhver $\bar{p}_0$ vil gi samme svar, fordi koeffisienten $a_1 = 0.25$ blir den samme (vi skal jo ha en sannsynlighetsvektor).

c) Vi vet at det finnes $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{p}_0 = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Det følger at $\lim_{i \to \infty} A^i \bar{p}_0 = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}}}$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A med tilhørende egenvektorer.

Vi skal nå se på systemet av differensialligninger:

$$y_1' = -0.3y_1 + 0.4y_2,$$
$$y_2' = 0.4y_1 + 0.3y_2.$$

b) Beskriv løsningsrommet til systemet.

Anta at y_1 og y_2 tilfredsstiller initialverdiene[1]

$$y_1(0) = 0.5,$$
$$y_2(0) = 0.75.$$

c) Finn y_1 og y_2.

a) $$\det(tI - A) = \begin{vmatrix} t+0.3 & -0.4 \\ -0.4 & t-0.3 \end{vmatrix}$$
$$= (t+0.3)(t-0.3) - 0.16$$
$$= t^2 - 0.9 - 0.16$$
$$= t^2 - 0.25 = (t-0.5)(t+0.5),$$

Så $\underline{\underline{0.5}}$ og $\underline{\underline{-0.5}}$ er egenverdiene til A.

$\lambda = 0.5$: $\quad \lambda I - A = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$ er en tilhørende egenvektor

$\lambda = -0.5$: $\quad \lambda I - A = \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ \hline \end{array}$ $\begin{pmatrix} -0.2 & -0.4 \\ -0.4 & -0.8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}}$ er en tilhørende egenvektor

Oppgave 4 La

$$A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A med tilhørende egenvektorer.

Vi skal nå se på systemet av differensialligninger:

$$y_1' = -0.3y_1 + 0.4y_2,$$
$$y_2' = 0.4y_1 + 0.3y_2.$$

b) Beskriv løsningsrommet til systemet.

Anta at y_1 og y_2 tilfredsstiller initialverdiene[1]

$$y_1(0) = 0.5,$$
$$y_2(0) = 0.75.$$

c) Finn y_1 og y_2.

$E_{0.5} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $E_{-0.5} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

b) Dette systemet er

$$A\bar{y} = \bar{y}'$$

med

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

Med $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ og $D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$ blir $A = QDQ^{-1}$, så vi gjør koordinatbyttet

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \bar{z} = Q^{-1}\bar{y}.$$

Da blir $\bar{z}' = Q^{-1}\bar{y}' = Q^{-1}A\bar{y} = Q^{-1}QDQ^{-1}\bar{y} = DQ^{-1}\bar{y} = D\bar{z}$

$\Rightarrow z_1' = 0.5z_1$ og $z_2' = -0.5z_2$

$\Rightarrow z_1(t) = c_1e^{0.5t}$ og $z_2(t) = c_2e^{-0.5t}$

$\bar{y} = Q\bar{z}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1(t) &= c_1e^{0.5t} + 2c_2e^{-0.5t} \\ y_2(t) &= 2c_1e^{0.5t} - c_2e^{-0.5t} \end{aligned}\right\} \text{GENERELL LØSNING}$$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A med tilhørende egenvektorer.

Vi skal nå se på systemet av differensialligninger:

$$y_1' = -0.3y_1 + 0.4y_2,$$
$$y_2' = 0.4y_1 + 0.3y_2.$$

b) Beskriv løsningsrommet til systemet.

Anta at y_1 og y_2 tilfredsstiller initialverdiene[1]

$$y_1(0) = 0.5,$$
$$y_2(0) = 0.75.$$

c) Finn y_1 og y_2.

$y_1(t) = c_1 e^{0.5t} + 2c_2 e^{-0.5t}$

$y_2(t) = 2c_1 e^{0.5t} - c_2 e^{-0.5t}$

c) $y_1(0) = 0.5 = c_1 + 2c_2$

$y_2(0) = 0.75 = 2c_1 - c_2$

$\Rightarrow c_1 = 0.4, \quad c_2 = 0.05,$

altså

$y_1 = 0.4 e^{0.5t} + 0.10 e^{-0.5t}$

$y_2 = 0.8 e^{0.5t} - 0.05 e^{-0.5t}$