1V

Generelle vektorrom

Motivasjon

La F være en kropp (for eksempel $F=\mathbb{R}$). Da har vi en + og en $\cdot$ i F. La S være en mengde.

Da kan vi se på mengden

$$F^S = \{f : S \longrightarrow F \mid f \text{ er en funksjon}\}.$$

- Vi kan bruke operasjonen + i F til å definere sum av funksjoner:
  For $f, g \in F^S$ lar vi $f+g \in F^S$ være funksjonen gitt ved
  $$(f+g)(s) := f(s) + g(s) \quad \forall s \in S.$$
  Foregår i F
- Vi kan bruke $\cdot$ i F til å få en skalarmultiplikasjon på F^S:
  For $f \in F^S$ og $a \in F$ lar vi $af \in F^S$ være funksjonen gitt ved
  $$(af)(s) := a \cdot f(s) \quad \forall s \in S.$$
  Foregår i F

F^S har mye til felles med $\mathbb{R}^n$.

DEF

En addisjon på en mengde V er en funksjon

$$a : V \times V \longrightarrow V.$$

Vi skriver $a(u,v) = u+v$.

La F være en kropp. En skalarmultiplikasjon på V er en funksjon

$$m : F \times V \longrightarrow V.$$

Vi skriver $m(x,v) = xv$.

EKS

- Over definerte vi addisjon og skalarmultiplikasjon på mengden F^S.
- I MA1201 brukte vi addisjon og skalarmultiplikasjon i $\mathbb{R}^n$.

Def

Et vektorrom over en kropp F er en mengde V med addisjon og skalarmultiplikasjon slik at

I $\quad \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

II $\quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

III $\quad$ Det finnes en $\bar{0} \in V$ slik at

$$\bar{0} + \bar{v} = \bar{v}$$

IV $\quad$ For hver $\bar{v} \in V$ finnes en $-\bar{v} \in V$ slik at $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.

V $\quad a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

VI $\quad 1\bar{v} = \bar{v}$

VII $\quad (a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

VIII $\quad a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$

Terminologi

- I og V kalles assosiative lover
- II sier at $+$ er kommutativ
- VII og VIII kalles distributive lover

Merk

- Vi krever at aksiomene holder for hver $a, b \in F$ og $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$
- Vi skriver $\bar{v} + (-\bar{w}) = \bar{v} - \bar{w}$.
- Vi kan vise at vektorene $\bar{0}$ i III og $-\bar{v}$ i IV er entydige!

Eks

$\mathbb{R}^n$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$.

Her er

- $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ og
- hvis $\bar{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, så er $-\bar{v} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Eks

For enhver kropp F og enhver mengde S blir

$$F^S = \{ f : S \to F \}$$

et vektorrom over F.

Dette skal vi vise i auditoriet!