PRØVEEKSAMEN, LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1. Avgjør om hver av de følgende påstandene er *sann* eller *usann*. I denne oppgaven trenger du ikke å begrunne svaret ditt.

(a) Delmengden

$$\{(1,0,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,1)\}$$

er en basis for vektorrommet $\mathbb{R}^3$. **USANT!**

(b) Delmengden

$$\{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$$

er et underrom av vektorrommet av alle funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (vi har brukt notasjonen $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ for dette vektorrommet). **USANT!**

Oppgave 2. La $\bar{u}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in V$ hvor V er et vektorrom.

Vis at hvis $\bar{u} \in \mathsf{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$, så er mengden $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ lineært avhengig i V.

Løsning. Vi løser oppgaven ved å vise at hvis $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig i V, så må $\bar{u} \notin \mathsf{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$.

Anta at $\{\bar{u}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig. Hvis $\bar{u} \in \mathsf{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ så finnes skalarer $a_1, \ldots, a_n$ slik at

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n.$$

Men da blir

$$\bar{0} = \bar{u} - a_1\bar{v}_1 - \ldots - a_n\bar{v}_n$$

som strider mot antagelsen om lineær uavhengighet. Dermed konkluderer vi med at $\bar{u} \notin \mathsf{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$.

Oppgave 3. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

(1) Hva menes med kjernen til f, $\mathsf{Ker}\, f$?

(2) Vis at hvis $\mathsf{Ker}\, f = \{\bar{0}_V\}$, så er f injektiv.
(Husk definisjonen: f kalles *injektiv* hvis $\bar{u} \neq \bar{v} \implies f(\bar{u}) \neq f(\bar{v})$.)

Løsning.

(1) Kjernen til f er definert som

$$\mathsf{Ker}\, f = \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_W\}.$$

(2) Anta at f ikke er injektiv. Da finnes distinkte vektorer $\bar{u}, \bar{v} \in V$ som gir $f(\bar{u}) = f(\bar{v})$. Siden f er lineær gir dette at

$$f(\bar{u} - \bar{v}) = f(\bar{u}) - f(\bar{v}) = \bar{0}_W,$$

som betyr $\bar{u} - \bar{v} \in \mathsf{Ker}\, f$. Men $\bar{u} - \bar{v} \neq \bar{0}_V$, og dermed er $\mathsf{Ker}\, f \neq \{\bar{0}_V\}$.

Oppgave 4. La
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
og la I være identitetsmatrisa med 3 rader og 3 kolonner. Finn matrisa
$$A^{10} - 5A^9 - 5A^8 + 5A^7.$$

Løsning. Her er $\mathsf{charpol}_A = t^3 - 5t^2 - 5t + 5$, så
$$A^{10} - 5A^9 - 5A^8 + 5A^7 = A^7 \underbrace{(A^3 - 5A^2 - 5A + 5I)}_{= 0 \text{ (Cayley–Hamilton)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 5. La f være en inverterbar lineær operator på et vektorrom V.

Vis at hvis λ er en egenverdi for f, så er $\frac{1}{\lambda}$ en egenverdi for f^{-1}.

Løsning. Anta at f er inverterbar. Merk at da er 0 ikke en egenverdi for f.

La nå λ være en egenverdi for f. Det betyr at det finnes en (ikke-null) vektor $\bar{v} \in V$ som er slik at
$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}.$$
Husk at f^{-1} er en lineær operator på V og at
$$f^{-1} \circ f = \mathsf{id}_V .$$
Spesielt får vi
$$\bar{v} = \mathsf{id}_V(\bar{v}) = (f^{-1} \circ f)(\bar{v}) = f^{-1}(f(\bar{v})) = f^{-1}(\lambda \bar{v}) = \lambda f^{-1}(\bar{v}),$$
hvor den siste likheten kommer fra det faktum at f^{-1} er lineær. Og nå er vi i mål: Det følger at
$$\frac{1}{\lambda}\bar{v} = f^{-1}(\bar{v}),$$
altså er $\frac{1}{\lambda}$ en egenverdi for f^{-1}.