V11

Egenverdier

Setup

$\dim V < \infty$

f er en lineær operator på et vektorrom V.

Husk

Valg av ordnet basis β
$\rightsquigarrow$ f gitt ved multiplikasjon med matrisa $[f]_\beta$.

Def

En kvadratisk matrise A er diagonal hvis

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(null over alt, bortsett fra på diagonalen!).

Merk

Hvis $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ er diagonal, så er
$A\bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i$
for hver standard basisvektor $\bar{e}_i$.

Vårt mål

Finn en ordna basis β for V som gjør at matrisa $[f]_\beta$ blir diagonal ("diagonaliser f").

DEF

En skalar $\lambda \in F$ er en egenverdi for f hvis det finnes en $\bar{v} \in V$ slik at

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} .$$

DEF

La λ være en egenverdi for f. En vektor $\bar{v} \in V$ er en tilhørende egenvektor hvis $\bar{v} \neq \bar{0}$ og $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$.

Eks

Hver λ_i er en egenverdi for $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, altså operatoren gitt ved multiplikasjon med matrisa

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

og $\bar{e}_i$ er en egenvektor som hører til λ_i.

Eks

La $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved $f(a,b) = (-b,a)$.
Da er f gitt ved rotasjon med 90° mot klokka, så $f(\bar{v})$ kan ikke være et skalarmultiplum av $\bar{v}$ (med mindre $\bar{v} = \bar{0}$).
Altså, f har ingen egenverdier (og dermed ingen egenvektorer).

Eks

La $f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ være gitt ved $f(a,b) = (-b,a)$.
Å finne egenverdier vil si å finne skalarer λ slik at $f(a,b) = \lambda(a,b)$, med $a \neq 0$ eller $b \neq 0$.
Du kan selv sjekke at $\lambda = \pm i$ er egenverdier for f og finne de tilhørende egenvektorene.

PROPOSISJON

La $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ være distinkte egenverdier for f og la $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ være tilhørende egenvektorer. Da er $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ lineært uavhengig.

BEVIS

Anta at $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ er lineært avhengig. Da finnes en minste k slik at

$$\bar{v}_k \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}).$$

Merk at $\bar{v}_1, \dots, v_{k-1}$ er lineært uavhengig.

Nå har vi:

$$\bar{v}_k \overset{(*)}{=} a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{k-1} \bar{v}_{k-1} \quad \text{for skalarer } a_i \in F$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}_k) = f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_{k-1}\bar{v}_{k-1})$$

$$= a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_{k-1} f(\bar{v}_{k-1})$$

$$\Rightarrow \lambda_k \bar{v}_k = a_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{k-1} \lambda_{k-1} \bar{v}_{k-1}$$

Multipliser $(*)$ med λ_k, og få

$$a_1 \lambda_k \bar{v}_1 + \dots + a_{k-1} \lambda_k \bar{v}_{k-1} = a_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{k-1} \lambda_{k-1} \bar{v}_{k-1}$$

$$\Rightarrow \bar{0} = a_1(\lambda_k - \lambda_1)\bar{v}_1 + \dots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\bar{v}_{k-1}$$

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ fordi: $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$ og $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}$ er lineært uavhengige.

$\Rightarrow \bar{v}_k = 0$, så $\bar{v}_k$ er ingen egenvektor.

Altså må $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ være lineært uavhengige. $\blacksquare$

DEF

Det karakteristiske polynomet til en matrise $A \in M_{n\times n}(F)$ er

$$p(x) = \det(A - x \cdot I_{n\times n}) \in F[x]$$

DEF

La $\dim V < \infty$. Det karakteristiske polynomet til f er det karakteristiske polynomet til matrisa $[f]_\beta$, hvor β er en vilkårlig ordna basis for V. Vi skriver ofte charpol_f for dette polynomet.

EGENSKAPER

- Polynomet charpol_f er veldefinert (dette sjekker dere selv).
- Røttene til charpol_f er egenverdiene til f.
- Polynomet charpol_f har grad lik $\dim V$. Det følger at f har høyst $\dim V$ egenverdier. $\square$

L11

EKSEMPLER

EKS

$D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ gitt ved derivasjon, $D(p) = p'$.

$p \neq 0$ egenvektor $\Rightarrow p' = \lambda p$ for en $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \deg p = 0$ (i.e. $p \in \mathbb{R}$).

Altså, den eneste egenverdien for D er 0, og egenvektorene er nøyaktig de ikke-null og konstante polynomene.

EKS

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $f(x,y) = (-3y, x)$.

La β være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$. Da er $[f]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, så

$$\mathrm{charpol}_f = \det \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 3.$$

Dette polynomet har ingen røtter i $\mathbb{R}$, så f har ingen (reelle) egenverdier.

V 12

Setup: $f : V \to V$

Cayley – Hamilton

Def

Et underrom $U \subset V$ er invariant under f eller f-invariant hvis $\bar{v} \in U \Rightarrow f(\bar{v}) \in U$

Eks

La $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ være gitt ved $D(p) = p'$.
Da er $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ et D-invariant underrom for hver $n \geq 0$.

Eks

La $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved
$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Da er underrommet $\sigma = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ invariant under f $(f(x,x) = (2x, 2x) \in \sigma)$.

Konstruksjon

For hver $\bar{v} \neq \bar{0}$ i V er
$U_{\bar{v}} := \text{span}(\bar{v}, f(\bar{v}), f^2(\bar{v}), f^3(\bar{v}), \ldots)$
et f-invariant underrom.

Merk

$U_{\bar{v}}$ er det minste f-invariante underrommet av V som inneholder $\bar{v}$.

OBSERVASJON

Det finnes et 1-dimensjonalt f-invariant underrom av V $\iff$ f har en egenverdi.

BEVIS

$\Rightarrow$: Hvis $U \subset V$ er 1-dimensjonalt, så er
$$U = \text{span}(\bar{v}) = \{\lambda \bar{v} \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$$
for en $\bar{v} \neq \bar{0}$. Hvis U også er f-invariant, så er $f(\bar{v}) \in U$, altså finnes en λ slik at $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$.

$\Leftarrow$: Hvis λ er en egenverdi, så finnes $\bar{v} \neq \bar{0}$ slik at $\lambda \bar{v} = f(\bar{v})$, og da blir $\text{span}(\bar{v})$ et 1-dimensjonalt og f-invariant underrom av V. $\square$

KONSTRUKSJON

Hvis $U \subset V$ er invariant under f, så får vi en operator $f|_U$ på vektorrommet U, altså
$$f|_U : U \longrightarrow U$$
gitt ved $f|_U(\bar{u}) = f(\bar{u})$ for hver $\bar{u} \in U$.

EKSEMPEL

La $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved $f(x,y) = (y,0)$. Da er
$$U = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
et f-invariant underrom, og $f|_U$ er null-operatoren på U.

LEMMA

La $\dim V < \infty$ og la $U \subset V$ være invariant under f. Da er det karakteristiske polynomet til $f|_U$ en faktor i det karakteristiske polynomet til f.

BEVIS

Utvid en ordna basis $\gamma = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ for U til en ordna basis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_n\}$ for V. La $B = [f]_\beta$ og $C = [f|_U]_\gamma$. Da blir $B = \begin{pmatrix} C & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, som betyr at

$$\operatorname{charpol}(f|_U) = \det(C - \lambda I_k) \mid \det(B - \lambda I_n) = \operatorname{charpol}(f). \qquad \square$$

LEMMA

La $\dim V < \infty$. La $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ og skriv $U = U_{\bar{v}}$ med $\dim U = k$.

i) $\{\bar{v}, f(\bar{v}), f^2(\bar{v}), \dots, f^{k-1}(\bar{v})\}$ er en basis for U.

ii) Hvis

$$a_0\bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + a_2 f^2(\bar{v}) + \dots + a_{k-1} f^{k-1}(\bar{v}) + f^k(\bar{v}) = \bar{0},$$

så er

$$\operatorname{charpol}(f|_U) = (-1)^k(a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).$$

BEVIS

i): La $j \geq 0$ være det største tallet slik at

$$\beta = \{\bar{v}, f(\bar{v}), f^2(\bar{v}), \dots, f^{j-1}(\bar{v})\}$$

er lineært uavhengig. Det holder å vise at

$$U = \operatorname{span}(\beta).$$

Det er klart at $\operatorname{span}(\beta) \subset U$. Siden $U = U_{\bar{v}}$ er det minste underrommet av V som er f-invariant og inneholder $\bar{v}$, holder det å vise at $\operatorname{span}(\beta)$ er f-invariant.

Merk at $f^j(\bar{v}) \in \operatorname{span}(\beta)$. Nå tar vi en vilkårlig $\bar{u} \in \operatorname{span}(\beta)$. Da er

$$\bar{u} = a_0\bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + \dots + a_{j-1} f^{j-1}(\bar{v})$$

og derfor blir

span β

$$f(\bar{u}) = a_0 f(\bar{v}) + a_1 f^2(\bar{v}) + \dots + a_{j-1} f^j(\bar{v}) \in \cancel{\beta},$$

altså er $\cancel{\beta}$ invariant under f.

span(β)

ii) : Nå bruker vi β fra i) som ordna basis for U. Dersom

$$a_0\bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + \dots + a_{k-1} f^{k-1}(\bar{v}) + f^k(\bar{v}) = \bar{0},$$

så blir

$$[f|_U]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

og denne matrisa har karakteristisk polynom

$$(-1)^k (a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + x^k).$$ $\square$

TEOREM (Cayley-Hamilton)

La $\dim V < \infty$ og la $p(x)$ være det karakteristiske polynomet til $f: V \to V$.

Da er $\underbrace{p(f)}_{\text{operatoren gitt som "polynomet p evaluert i f"}} = 0$

↖ null-operatoren gitt ved $0(\bar{v}) = \bar{0} \quad \forall \bar{v} \in V$.

BEVIS

Vi må vise at $p(f)(\bar{v}) = 0 \ \forall \bar{v} \in V$. Dette er opplagt for $\bar{v} = \bar{0}$, så anta at $\bar{v} \neq \bar{0}$.

Se på $U = U_{\bar{v}}$ som i forrige BEVIS. Da finnes $a_0, \dots, a_k$ slik at

$$a_0\bar{v} + a_1\bar{v} + \dots + a_{k-1} f^{k-1}(\bar{v}) = -f^k(\bar{v}) \quad (\text{ved i})),$$

og dermed blir

$$q(x) = (-1)^k (a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + x^k)$$

det karakteristiske polynomet til $f|_U$ (ved :)).

Totalt gir dette

$$q(f)(\bar{v}) = (-1)^k (a_0 \bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + \dots + a_{k-1} f^{k-1}(\bar{v}) + f^k(\bar{v})) = \bar{0}.$$

Ved vårt første LEMMA er q en faktor i p, altså $p = q \cdot s$ for et polynom s, og dermed

$$p(f) = \underbrace{q(f)}_{=0} \cdot s(f) = \bar{0}$$

$\square$

L13

$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Hva er A^{1000}?

Egenverdier : 5 og 4

Egenrom : $E_5 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $E_4 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{1000}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^{1000} & 0 \\ 0 & 4^{1000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 5^{1000} - 4^{1000} & -5^{1000} + 4^{1000} \\ 2\cdot 5^{1000} - 2\cdot 4^{1000} & -5^{1000} + 2\cdot 4^{1000} \end{pmatrix}$$

La A være ei diagonaliserbar matrise med 0 og 1 som sine (eneste) egenverdier.

FOR EKSEMPEL
$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Finn A^k for hver $k \geq 1$.

A diagonaliserbar $\Rightarrow A = PDP^{-1}$

$\Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$.

Her er $D^k = D \quad \forall \; k \geq 1$

$$\Rightarrow A^k = PDP^{-1} = A \quad \forall \; k \geq 1 \quad !!$$

V13

SETUP: $f: V \to V$

KOMPLEKSE VEKTORROM

DEF

En kvadratisk matrise er **øvre triangulær** hvis hvert element under hoveddiagonalen er null.

Typisk bilde

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

OBSERVASJON

Hvis $\dim V < \infty$, så er de følgende utsagnene ekvivalente.

i) λ er en egenverdi for f,

ii) $f - \lambda \cdot id_V$ er ikke injektiv,

iii) $f - \lambda \cdot id_V$ er ikke surjektiv,

iv) $f - \lambda \cdot id_V$ er ikke inverterbar.

Operatoren $id_V : V \to V$ er gitt ved $id_V(\vec{v}) = \vec{v}$ $\forall\, \vec{v} \in V$.

BEVIS

Dette gjør vi i auditoriet. $\square$

Proposisjon

La $f: V \to V$ være en lineær operator hvor V er et endeligdimensjonalt og ikke-null vektorrom over $\mathbb{C}$. Da har f en egenverdi.

Bevis

Skriv $\dim V = n$, og velg en $\bar{v} \in V \setminus \{\bar{0}\}$. Da er vektorene

$$\bar{v}, f(\bar{v}), f^2(\bar{v}), \ldots, f^n(\bar{v})$$

lineært avhengige, så vi har

$$\bar{0} = a_0 \bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + a_2 f^2(\bar{v}) + \ldots + a_n f^n(\bar{v}),$$

hvor $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ og minst én $a_i \neq 0$. Merk at faktisk må en av tallene $a_1, \ldots, a_n$ være ikke-null (ellers får vi $\bar{0} = a_0 \bar{v}$, som impliserer at også $a_0 = 0$).

Se på polynomet

Algebraens fundamentalteorem!

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = c(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m) \in \mathbb{C}[x].$$

Det betyr at

$$\begin{aligned} \bar{0} &= a_0 \bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + \ldots + a_n f^n(\bar{v}) \\ &= (a_0 \cdot \mathrm{id}_V + a_1 f + \ldots + a_n f^n)(\bar{v}) \\ &= c(f - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}_V) \ldots (f - \lambda_m \cdot \mathrm{id}_V)(\bar{v}). \end{aligned}$$

Dette impliserer at $f - \lambda_j \cdot \mathrm{id}_V$ ikke er injektiv for minst én j, og dermed har f en egenverdi. $\square$

MERK

Dette betyr at det finnes en basis β for V som er slik at matrisa $[f]_\beta$ er på formen

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

PROPOSISJON

La $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ være en basis for V. De følgende utsagnene er ekvivalente.

i) Matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

ii) $f(\bar{v}_j) \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ for hver $1 \le j \le n$.

iii) $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ er f-invariant for hver $1 \le j \le n$.

BEVIS

i) $\Leftrightarrow$ ii) : Opplagt

iii) $\Rightarrow$ ii) : Opplagt.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Anta at ii) holder og velg en $1 \le j \le n$.

Vi har da

$$f(\bar{v}_1) \in \text{span}(\bar{v}_1) \subset \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$$
$$f(\bar{v}_2) \in \text{span}(\bar{v}_1, v_2) \subset \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$$
$$\vdots$$
$$f(\bar{v}_j) \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j).$$

Derfor, hvis $\bar{v} \in V$ er en lineærkombinasjon av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j$, så vil $f(\bar{v}) \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$.

Altså, $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ er invariant under f. $\square$

TEOREM

La V være et vektorrom over $\mathbb{C}$ med $\dim V < \infty$. Da finnes en basis β for V som er slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

BEVIS

Vi bruker induksjon på $\dim V = n$. Det er trivielt at resultatet holder for $n = 1$.

Anta at $n > 1$ og at resultatet holder for hvert vektorrom over $\mathbb{C}$ med dimensjon $< n$.
Ved dagens første PROPOSISJON har f en egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$. Se på underrommet
$$U := \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot id_V) \subset V.$$
Da har vi $\dim U < n$ ved vår tidligere OBSERVASJON. Dessuten er U f-invariant:
$$\bar{u} \in U \Rightarrow f(\bar{u}) = \underbrace{(f - \lambda \cdot id_V)(\bar{u})}_{\in U} - \underset{\in U}{\lambda u} \in U. \quad (*)$$

Altså har vi en operator $f|_U : U \longrightarrow U$. Ved induksjonshypotesen finnes en basis $\gamma = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ for U slik at $[f|_U]_\gamma$ er øvre triangulær. Ved forrige PROPOSISJON har vi:
$$f(\bar{u}_j) = f|_U(\bar{u}_j) \in \operatorname{span}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_j) \quad \text{for } 1 \le j \le m.$$

Utvid γ til en basis
$\beta = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s\}$ for hele V.
For hver k har vi
$$f(\bar{v}_k) = \underbrace{(f - \lambda \cdot id_V)(\bar{v}_k)}_{\in U = Im(f - \lambda \cdot id_V)} + \lambda \bar{v}_k$$
Det er nå klart at
$$f(\bar{v}_k) \in span(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k). \quad (**)$$

Nå impliserer $(*)$ og $(**)$ sammen med forrige PROPOSISJON at $[f]_\beta$ er øvre triangulær. $\square$

L12

LITT ARTIG

La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) med $\dim V < \infty$. For hver $\lambda \in \mathbb{R}$ (hhv. $\mathbb{C}$) finnes en $\alpha \in \mathbb{R}$ (hhv. $\mathbb{C}$) slik at $|\alpha - \lambda| < \frac{1}{1000}$ og $f - \alpha \cdot id_V$ er inverterbar.

BEVIS

Anta at påstanden ikke holder. Da er $f - \alpha \cdot id_V$ ikke inverterbar for hver α slik at $|\alpha - \lambda| < 1/1000$. Det betyr at α er en egenverdi for f. Men det finnes uendelig mange slike α, og f kan jo ha høyst $\dim V$ distinkte egenverdier. $\square$

V14

SETUP:

$f: V \longrightarrow V$ og $\dim V < \infty$.

DIAGONALISERING

DEFINISJON

f er **diagonaliserbar** hvis det finnes en basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

ALTERNATIV DEFINISJON

La $\dim V < \infty$.

i) Operatoren $f: V \longrightarrow V$ er diagonaliserbar

$\Longleftrightarrow$

det finnes en ordna basis for V som består av egenvektorer for f.

ii) Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en ordna basis av egenvektorer, så har den diagonale matrisa $[f]_\beta$ egenverdien λ_i (som svarer til $\bar{v}_i$) på plass nummer i på diagonalen.

BEVIS

i) $\Rightarrow$: Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en ordna basis slik at $[f]_\beta = D$ er diagonal, så blir

$$f(\bar{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} D_{ji} \bar{v}_j = \underbrace{D_{ii}}_{\lambda_i} \bar{v}_i,$$ så $\bar{v}_i$ er en egenvektor.

$\Leftarrow$: Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en ordna basis slik at $f(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i$ for $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, så blir

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Husk: Kolonne nummer i i $[f]_\beta$ er koordinatvektoren $[f(\vec{v}_i)]_\beta$.

ii): Dette er klart nå. $\square$

OBSERVASJON

Hvis f er diagonaliserbar, så kan $\text{charpol}_f \in F[x]$ skrives som et produkt av polynomer av grad 1 (charpol_f "splitter").

BEVIS

f diagonaliserbar $\Rightarrow \exists$ basis β slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{charpol}_f = \det([f]_\beta - x \cdot I_n) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x). \quad \square$$

OBSERVASJON

La $\dim V = n < \infty$. Dersom f har n distinkte egenverdier, så er f diagonaliserbar.

BEVIS

Dette gjør vi i auditoriet. $\square$

DEF

La λ være en egenverdi for f. Det tilhørende **egenrommet** er
$$E_\lambda := \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \} \subset V.$$

MERK

$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot id_V)$, så E_λ er et underrom.

DEF

Multiplisiteten $m(\lambda)$ til en egenverdi λ for f er det største tallet slik at
$$(x-\lambda)^{m(\lambda)} \mid \mathrm{charpol}_f .$$

PROPOSISJON

La λ være en egenverdi for f. Da er
$$\dim E_\lambda \leq m(\lambda).$$

BEVIS

Velg en ordna basis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ for E_λ og utvid til en basis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p, \bar{v}_{p+1}, \dots, \bar{v}_n\}$ for V. For $1 \leq i \leq p$ er $\bar{v}_i$ en egenvektor for f som hører til egenverdien λ, så
$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_p & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Identitetsmatrisa av størrelse n.

Som i beviset for Cayley–Hamilton, får vi at $\det((\lambda - x) I_p) = (\lambda - x)^p$ er en divisor i charpol_f. Det vil si: $m(\lambda) \geq p = \dim E_\lambda$. $\square$

TEOREM

Hvis f er diagonaliserbar, så er $\dim E_\lambda = m(\lambda)$ for hver egenverdi λ for f.

BEVIS

Anta at f er diagonaliserbar. Da finnes en basis β som består av egenvektorer for f. La $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ være distinkte egenverdier og skriv $\beta_i = \beta \cap E_{\lambda_i}$. La $n_i = \#$vektorer i β_i. Da er $n_i \leq \dim E_{\lambda_i}$ for hver i, siden vektorene i β_i er lineært uavhengige. Ved forrige PROPOSISJON har vi også $\dim E_{\lambda_i} \leq m(\lambda_i)$.

Merk at $\sum_{i=1}^{k} n_i = \overset{\dim V}{n}$ og $\overbrace{\sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i)}^{= \text{graden til } \text{charpol}_f} = n$, så

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \underset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} \underset{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = n.$$

Dette betyr at $\sum_{i=1}^{k} (m(\lambda_i) - \dim E_{\lambda_i}) = 0$, hvilket gir $m(\lambda_i) = \dim E_{\lambda_i}$ for hver $1 \leq i \leq k$ (husk at $m(\lambda_i) - \dim E_{\lambda_i} \geq 0$ ved forrige PROPOSISJON). $\square$

TEOREM

Anta at charpol_f splitter, og la $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ være de distinkte egenverdiene for f. Hvis $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ for hver $1 \le i \le k$, så er f diagonaliserbar.

BEVIS

Hvis β_i er en basis for E_{λ_i}, så er mengden $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_k \subset V$ lineært uavhengig (oppgave). Hvis $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ for hver i, så er antallet vektorer i β lik

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = \sum m(\lambda_i) = \dim V.$$

(Husk beviset for forrige TEOREM.)

Det vil si at β er en (ordna) basis for V, og β består av egenvektorer for f. $\square$

OPPSUMMERING

La $\dim V < \infty$ og la $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ være de distinkte egenverdiene for f. Da er f diagonaliserbar $\iff \dim V = \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_m}$.

GJØR SELV

L14

MATRISER

Husk

For hver matrise $A \in M_{n\times n}(F)$ har vi en operator $L_A : F^n \longrightarrow F^n$ gitt ved $L_A(\bar{v}) = A\cdot\bar{v}$.

DEF

En ikke-null $\bar{v} \in F^n$ er en egenvektor for A hvis $\bar{v}$ er en egenvektor for operatoren L_A, altså hvis $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ for en skalar $\lambda \in F$. En slik λ er en egenverdi for A.

Matrisa A er diagonaliserbar hvis operatoren L_A er diagonaliserbar

VIKTIG POENG

La $\dim V = n$ og la β være en (vilkårlig) basis for V.
En vektor $\bar{v} \in V$ er en egenvektor for $f: V \longrightarrow V$ med egenverdi $\lambda \in F$

$\Longleftrightarrow$

Koordinatvektoren $[\bar{v}]_\beta$ er en egenvektor for $L_{[f]_\beta}: F^n \longrightarrow F^n$ med egenverdi λ.

SJEKK SELV

MERK

Matrisa A er diagonaliserbar $\iff$ det finnes ei inverterbar matrise Q slik at $Q^{-1}AQ$ er diagonal.

I ei slik matrise Q utgjør kolonnene en basis av egenvektorer for A, og på plass j på diagonalen i matrisa $Q^{-1}AQ$ finner vi egenverdien for A som tilhører kolonne j i Q. $\square$

EKS

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{charpol } A = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ -1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)(t^2+1)$$

$\Rightarrow$ egenverdiene til A er 2, i og $-i$

$\Rightarrow$ A er diagonaliserbar.

Egenrommene er

$$E_2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right); \quad E_i = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\right); \quad E_{-i} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15V

ANVENDELSE:
HOMOGENE LINEÆRE SYSTEMER AV DIFFERENSIALLIGNINGER

HUSK

Differensialligninga $y' = ay$ er lett å løse: $y = Ce^{ax}$.

MÅLET VÅRT

Finne løsninger av systemer av differensial-ligninger på formen

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} (*)$$

Her er $y_i = y_i(x)$ funksjoner som skal bestemmes og a_{ij} er konstanter.

MERK

Systemet $(*)$ kan skrives som $\bar{y}' = A\bar{y}$, hvor

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

EKSEMPEL

Hva er løsningen av følgende system?

$$y_1' = 3y_1$$
$$y_2' = -2y_2$$
$$y_3' = 5y_3$$

Her kan vi løse ligningene hver for seg, og det er lett:

$$y_1 = c_1 e^{3x}, \quad y_2 = c_2 e^{-2x}, \quad y_3 = c_3 e^{5x}.$$

MERK

Systemet i forrige eksempel var lett å løse fordi hver ligning involverte kun én ukjent funksjon (y_1, y_2, eller y_3). Med andre ord, når vi skriver dette systemet på matriseformen

$$\bar{y}' = A\bar{y},$$

så er A ei diagonalmatrise, altså

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

IDÉ

Hvordan løse systemet $\bar{y}' = A\bar{y}$?

Hvis A er diagonaliserbar, finn en substitusjon for $\bar{y}$ som utnytter dette!

EKSPLISITT

Anta at Q diagonaliserer A (altså at $Q^{-1}AQ = D$ er ei diagonalmatrise). Da kan $\bar{y}' = A\bar{y}$ løses som følger.

1) Skriv $\bar{y} = Q\bar{v}$ (dermed også $\bar{y}' = Q\bar{v}'$) hvor $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ og hver v_i er en (ukjent) funksjon.

2) Innsatt: $\bar{y}' = A\bar{y}$ gir dette
$$Q\bar{v}' = AQ\bar{v},$$
altså
$$\bar{v}' = Q^{-1}AQ\,\bar{v} = D\bar{v} \quad (**)$$

3) Løs ligninga $(**)$ mhp $\bar{v}$ (dette er lett).

4) Finn $\bar{y}$ fra uttrykket $\bar{y} = Q\bar{v}$.

EKSEMPEL

Finn en løsning av systemet

$$y_1' = y_1 + y_2$$
$$y_2' = 4y_1 - 2y_2$$

som oppfyller $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 6$.

Vi ser altså på $\bar{y}' \overset{(*)}{=} A\bar{y}$, hvor $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.
A har egenverdiene 2 og -3, med tilhørende egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Så la

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da vet vi at $Q^{-1}AQ = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, og vi kan følge fremgangsmåten fra over:

Skriv $\bar{y} = Q\bar{v}$ for $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Da blir (*) til $\bar{v}' = D\bar{v}$, det vil si:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

altså $v_1' = 2v_1$ og $v_2' = -3v_2$. Disse løser vi lett, nemlig

$$v_1 = c_1 e^{2x} \quad \text{og} \quad v_2 = c_2 e^{-3x}.$$

Nå finner vi y_1 og y_2:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \bar{y} = Q\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - \frac{1}{4}v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix},$$

altså

$$y_1 = v_1 + 4v_2 = c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \qquad (**)$$
$$y_2 = v_1 - v_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}. \qquad (***)$$

Til slutt bestemmer vi c_1 og c_2 slik at $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 6$: Disse betingelsene impliserer

$$(**) \qquad 1 = c_1 - \tfrac{1}{4} c_2$$

$$(***) \qquad 6 = c_1 + c_2 \quad .$$

Dette systemet har løsning $c_1 = 2, c_2 = 4$, så endelig svar er

$$\underline{\underline{y_1 = 2e^{2x} - e^{-3x} \quad ; \quad y_2 = 2e^{2x} + 4e^{-3x}}} \quad .$$

ANVENDELSE: MARKOV-KJEDER

Anta at vi observerer et system som kan "bevege seg" mellom visse "tilstander". Dersom sannsynligheten for at systemet havner i en gitt tilstand kan forutsies basert kun på den forrige tilstanden, så kaller vi prosessen en Markov-kjede.

Eks

I Syracuse, New York, har AVIS tre kontorer/garasjer. Kunden trenger ikke å returnere sin leiebil til den samme garasjen som hun hentet den fra.

	Bil hentes fra 1	2	3
Bil returneres til 1	80%	30%	20%
Bil returneres til 2	10%	20%	60%
Bil returneres til 3	10%	50%	20%

DEF

I en Markov-prosess med k mulige tilstander 1, 2, ..., k har vi:

p_{ij} := sannsynligheten for at systemet havner i tilstand i rett etter at det har vært i tilstand j.

Matrisa

$P = [p_{ij}]$

er overgangsmatrisa for Markov-kjeden.

Eks

Overgangsmatrisa for bilutleiefirmaet i Syracuse er

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Eks

En tilstandsvektor for en observasjon av en Markov-prosess med k mulige tilstander $1, 2, \dots, k$ er en kolonnevektor

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

hvor x_i er sannsynligheten for at systemet befinner seg i tilstand i på dette tidspunktet.

Merk

- I matrisa P må summen av elementene i en kolonne være lik 1. En slik matrise kalles stokastisk.
- I en tilstandsvektor $\bar{x}$ må summen av elementene være lik 1. En slik vektor kalles en sannsynlighetsvektor.

POENGET

Hvis vi kjenner en tilstandsvektor $\bar{x}^{(0)}$ for en Markov-kjede ved et "utgangstidspunkt", så kan vi finne tilstandsvektorene

$$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \ldots, \bar{x}^{(t)}, \ldots$$

for de påfølgende tidspunktene som

$$\bar{x}^{(t)} = P^{t} \, \bar{x}^{(0)} .$$

matrisa P opphøyd i t.

DEF

En følge $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ av $r \times s$ - matriser **konvergerer** mot $r \times s$ - matrisa A dersom

$$\lim_{n \to \infty} (A_n)_{i,j} = A_{i,j} \quad \text{i hver posisjon } (i,j).$$

I dette tilfellet skrives vi: $\lim_{n \to \infty} A_n = A$.

Merk

La $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

- Hvis T er ei $t\times r$-matrise, så er $\lim_{n\to\infty} (TA_n) = TA$.
- Hvis S er ei $s\times t$-matrise, så er $\lim_{n\to\infty} (A_n S) = AS$.

Eks

- La $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Følgen $P, P^2, P^3, \ldots, P^k, \ldots$ konvergerer ikke, fordi:

$$P = P^3 = P^5 = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad P^2 = P^4 = P^6 = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DEF

Ei overgangsmatrise P er regulær hvis det finnes et heltall n som er slik at $[P^n]_{ij} > 0$ i hver posisjon (i,j).

EKS

- $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ er regulær, siden $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
- $P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ er ikke regulær (enig?).

TEOREM (!)

Hvis P er ei regulær overgangsmatrise, så er

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix} = Q.$$

sannsynlighetsvektor!

$\square$

KOROLLAR

Hvis P er ei regulær overgangsmatrise og $\bar{x}$ er en sannsynlighetsvektor, så er

$$\lim_{n \to \infty} P^n \bar{x} = \bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}$$

for en fiksert sannsynlighetsvektor $\bar{q}$.

BEVIS

Med vår notasjon blir

$$Q\bar{x} = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 x_1 + q_1 x_2 + \cdots + q_1 x_k \\ q_2 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_2 x_k \\ \\ q_k x_1 + q_k x_2 + \cdots + q_k x_k \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}_{=1} \bar{q} = \bar{q}. \quad \square$$

ALTSÅ

I en regulær Markov-kjede vil prosessen nærme seg en fiksert tilstandsvektor $\bar{q}$. Denne kalles likevektsvektoren eller den stasjonære tilstandsvektoren for Markov-kjeden.

TEOREM

Likevektsvektoren $\bar{q}$ for ei regulær overgangsmatrise P er den entydige sannsynlighetsvektoren som oppfyller

$$P\bar{q} = \bar{q}.$$

BEVIS

Vi har

$$Q = \lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} = P \lim_{n\to\infty} P^n = PQ.$$

Spesielt betyr dette at $P\bar{q} = \bar{q}$, siden hver kolonne i Q er lik $\bar{q}$.

Hvis $\bar{r}$ er en sannsynlighetsvektor med $P\bar{r} = \bar{r}$, så blir $P^n\bar{r} = \bar{r}$ for hver $n \geq 0$, og dermed

$$\bar{r} = \lim P^n \bar{r} = \bar{q}. \qquad \square$$

MED ANDRE ORD

For hver sannsynlighetsvektor $\bar{x}$, er $\bar{q} = \lim_{n\to\infty} P^n \bar{x}$ en egenvektor for P tilhørende egenverdien 1. $\square$

Eks

Husk bilutleiefirmaet med $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$.

For å finne $\bar{q}$ løser vi $P\bar{q} = \bar{q}$, altså
$$(I - P)\bar{q} = \bar{0}.$$

Dette systemet har generell løsning $\bar{q} = s\begin{pmatrix} 34/13 \\ 14/13 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

For å få en sannsynlighetsvektor må vi la
$$s = \frac{1}{34/13 + 14/13 + 1} = \frac{13}{61},$$
som gir
$$\bar{q} = \begin{pmatrix} 34/61 \\ 14/61 \\ 13/61 \end{pmatrix}$$

Tolkning: Hvis firmaet eier 1000 biler, så bør det være minst

- 558 parkeringsplasser i garasje 1,
- 230 parkeringsplasser i garasje 2, og
- 214 parkeringsplasser i garasje 3.

MERK

I praksis kan det ofte være mest effektivt å regne ut P^n for en stor n dersom man er ute etter $\bar{q}$.