V5

LINEÆRTRANSFORMASJONER

DEF

En lineærtransformasjon fra V til W er en funksjon $f: V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \quad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in V$$
$$f(a\bar{v}) = a f(\bar{v}) \quad \forall\ \bar{v} \in V,\ a \in F.$$

En lineærtransformasjon $V \longrightarrow V$ kalles en lineær operator.

EKS

Null-funksjonen $0: V \to W$ gitt ved
$$0(\bar{v}) = \bar{0} \quad \forall\ \bar{v} \in V$$
er lineær.

EKS

La M være en $m \times n$-matrise over $\mathbb{R}$.
Da er $L_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gitt ved
$L_M(\bar{v}) = M\bar{v}$ en lineærtransformasjon.

(Vi har regnet med matriser og vektorer i MA1201, og vet at
$$L_M(\bar{u}+\bar{v}) = M(\bar{u}+\bar{v}) = M\bar{u}+M\bar{v} = L_M(\bar{u})+L_M(\bar{v})$$
$$L_M(a\bar{v}) = M(a\bar{v}) = a(M\bar{v}) = aL_M(\bar{v}).)$$

Eks

Derivasjon $D: \mathbb{R}\{x\} \to \mathbb{R}\{x\}$, altså $D(f) = f'$, er lineær.

(Vi vet fra analysen at
$(f+g)' = f' + g'$ og $(\lambda f)' = \lambda f'$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Eks

Integrasjon er en lineærtransformasjon, dvs.
$T: \mathbb{R}\{x\} \to \mathbb{R}$ gitt ved $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

(Vi vet fra analysen at
$\int_0^1 (f(x)+g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$

og at $\lambda \int_0^1 f(x)\,dx = \int \lambda f(x)\,dx$.)

Eks

Projeksjon er en lineærtransformasjon, for eksempel $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved
$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1, x_3)$.

(Vi sjekker enkelt at

$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ ← er like enkelt å sjekke.

$f((x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4))$
$= f((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4))$
$= (x_1+y_1, x_3+y_3)$
$= (x_1, x_3) + (y_1, y_3)$
$= f((x_1,x_2,x_3,x_4)) + f((y_1,y_2,y_3,y_4))$.)

TEOREM

La $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ være en basis for V og la $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n \in W$ være vilkårlige. Det eksisterer nøyaktig en lineærtransformasjon $f: V \to W$ slik at $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \quad \forall\ i = 1, \dots, n$.

MED ANDRE ORD

En lineærtransformasjon er entydig bestemt av hvordan den virker på en basis.

BEVIS

- f eksisterer: Definér $f: V \to W$ ved

$$f(\underbrace{c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n}_{\text{Enhver vektor i } V \text{ er på denne formen!}}) = c_1\bar{w}_1 + \dots + c_n\bar{w}_n \quad \forall\, c_i \in F.$$

Det er klart at $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \quad \forall\ i = 1, \dots, 2.$

f er også lineær: Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in V$, så er $\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$ og $\bar{v} = b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n$, og dermed

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + \bar{v}) &= f((a_1+b_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_n+b_n)\bar{v}_n) \\ &= (a_1+b_1)\bar{w}_1 + \dots + (a_n+b_n)\bar{w}_n \\ &= (a_1\bar{w}_1 + \dots + a_n\bar{w}_n) + (b_1\bar{w}_1 + \dots + b_n\bar{w}_n) \\ &= f(\bar{u}) + f(\bar{v}). \end{aligned}$$

For $a \in F$ får vi:

$$\begin{aligned} f(a\bar{v}) &= f(ab_1\bar{v}_1 + \dots + ab_n\bar{v}_n) \\ &= ab_1\bar{w}_1 + \dots + ab_n\bar{w}_n \\ &= a(b_1\bar{w}_1 + \dots + b_n\bar{w}_n) = a f(\bar{v}). \end{aligned}$$

· f er entydig: La $g: V \to W$ være lineær og anta at $g(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, 2.$

Da får vi, for vilkårlig $\bar{v} = b_1\bar{v}_1 + \ldots + b_n\bar{v}_n \in V$,

g er lineær

$$\begin{aligned} g(\bar{v}) &= g(b_1\bar{v}_1 + \ldots + b_n\bar{v}_n) \\ &= g(b_1\bar{v}_1) + \ldots + g(b_n\bar{v}_n) \\ &= b_1 g(\bar{v}_1) + \ldots + b_n g(\bar{v}_n) \\ &= b_1\bar{w}_1 + \ldots + b_n\bar{w}_n = f(\bar{v}), \end{aligned}$$

altså $g = f$. $\square$

L5

Vektorrommet av lineærtransformasjoner

Konstruksjon

La $f, g : V \to W$ være to lineærtransformasjoner.
Definér

$f+g : V \to W$ ved $(f+g)(\bar{v}) = f(\bar{v}) + g(\bar{v}) \quad \forall\, v \in V.$
addisjon i W.

For $a \in F$, definér

$af : V \to W$ ved $(af)(\bar{v}) = a f(\bar{v}) \quad \forall\, v \in V$
skalarmultiplikasjon i W.

Observasjon

$f+g$ og af er lineærtransformasjoner!

Bevis

Vi viser at $f+g$ er lineær:

La $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Da er

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\bar{u}+\bar{v}) &= f(\bar{u}+\bar{v}) + g(\bar{u}+\bar{v}) && \text{Definisjon av } f+g \\
&= f(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{u}) + g(\bar{v}) && f \text{ og } g \text{ er lineære} \\
&= f(\bar{u}) + g(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{v}) \\
&= (f+g)(\bar{u}) + (f+g)(\bar{v}) && \text{Definisjon av } f+g
\end{aligned}
$$

For hver $a \in F$ er

$$
\begin{aligned}
(f+g)(a\bar{v}) &= f(a\bar{v}) + g(a\bar{v}) && \text{Definisjon av } f+g \\
&= a f(\bar{v}) + a g(\bar{v}) && f \text{ og } g \text{ er lineære} \\
&= a(f(\bar{v}) + g(\bar{v})) \\
&= a(f+g)(\bar{v}) && \text{Definisjon av } f+g
\end{aligned}
$$

Dere viser selv at af er lineær $\square$

Definisjon

La

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ er en lineærtransf} \}.$$

Proposisjon

Med addisjonen og skalarmultiplikasjonen over blir $\mathrm{Hom}_F(V,W)$ et vektorrom over F. $\square$

Hva gjenstår av beviset?

V6

FUNDAMENTALTEOREMET FOR LINEÆRTRANSFORMASJONER

DEF

La $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. **Kjernen** til f er
$$\mathrm{Ker}\, f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0} \} \subset V.$$

EKS

Nullavbildningen $0 : V \to W$ har en stor kjerne: Her er $0(\bar{v}) = \bar{0}$ $\forall\, \bar{v} \in V$, så $\mathrm{Ker}\, 0 = V$.

EKS

Se på derivasjon som en lineæravbildning
$$D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$
Da er $\mathrm{Ker}\, D = \{ p \in \mathbb{R}[x] \mid p' = 0 \}$
$= \{$ konstante polynomer $\} = \mathbb{R}[x]_{\leq 0}$.

EKS

La $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ være en matrise. Da er
$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ gitt ved } L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$$
en lineærtransformasjon, og $\mathrm{Ker}\, L_A$ er det samme som nullrommet til matrisa A.

OBSERVASJON

La $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. Kjernen $\mathrm{Ker} f$ er et underrom av V.

BEVIS

- f er lineær, så $f(\bar{0}) = \bar{0}$, i.e. $\bar{0} \in \mathrm{Ker} f$.
- Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in \mathrm{Ker} f$, så er $\bar{u} + \bar{v} \in \mathrm{Ker} f$ fordi:
  $f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.
- For hver $a \in F$ og $\bar{v} \in \mathrm{Ker} f$ er $a\bar{v} \in \mathrm{Ker} f$ fordi:
  $f(a\bar{v}) = a f(\bar{v}) = a\bar{0} = \bar{0}$ $\square$

HUSK

En funksjon $\phi : X \longrightarrow Y$ er injektiv (også kalt 1-1) hvis

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

TRIKS

La $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. Da er f injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{\bar{0}\}$.

BEVIS

$\Rightarrow$: Anta at f er injektiv. Hvis $\bar{v} \in \mathrm{Ker} f$, så er $f(\bar{v}) = \bar{0} = f(\bar{0})$, så $\bar{0} = \bar{v}$.

$\Leftarrow$: Anta at $\mathrm{Ker}\, f = \{\bar{0}\}$. Hvis $f(\bar{u}) = f(\bar{v})$, så er

$$\bar{0} = f(\bar{u}) - f(\bar{v}) = f(\bar{u} - \bar{v}),$$

altså $\bar{u} - \bar{v} \in \mathrm{Ker} f = \{\bar{0}\}$, i.e. $\bar{u} - \bar{v} = \bar{0}$, i.e. $\bar{u} = \bar{v}$. $\square$

DEF

La $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. **Bildet** til f er

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \} \subset W.$$

EKS

Nullavbildningen $0 : V \longrightarrow W$ har et lite bilde:

$$\mathrm{Im}\, 0 = \{ 0(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \} = \{ \bar{0} \}.$$

EKS

Derivasjon $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ har et stort bilde: Hvert polynom $q \in \mathbb{R}[x]$ har en antiderivert $q \in \mathbb{R}[x]$, altså $p' = q$.

Derfor er

$$\mathrm{Im}\, D = \{ p' \in \mathbb{R}[x] \mid p \in \mathbb{R}[x] \}$$
$$= \mathbb{R}[x]$$

EKS

La $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ være en matrise. Da er $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gitt ved $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$ en lineærtransformasjon, og $\mathrm{Im}\, f$ er det samme som **kolonnerommet til matrisa** A.

OBSERVASJON

La $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. Bildet $\mathrm{Im} f$ er et underrom av W.

BEVIS

- $\bar{0} = f(\bar{0}) \in \mathrm{Im} f$
- For $f(\bar{u}), f(\bar{v}) \in \mathrm{Im} f$ får vi også
  $f(\bar{u}) + f(\bar{v}) = f(\bar{u} + \bar{v}) \in \mathrm{Im} f$
- For $a \in F$ og $f(\bar{v}) \in \mathrm{Im} f$ får vi:
  $a f(\bar{v}) = f(a\bar{v}) \in \mathrm{Im} f$. $\square$

TEOREM (FUNDAMENTALTEOREMET)

La V være endeligdimensjonalt og la $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. Da er $\mathrm{Im}\, f$ endeligdimensjonalt og
$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f.$$

BEVIS

$\mathrm{Ker}\, f$ er et underrom av V, så $\mathrm{Ker}\, f$ er endeligdimensjonalt. La $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ være en basis for $\mathrm{Ker}\, f$. Da kan vi utvide til en basis
$$\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \quad \text{for } V.$$
Altså har vi $\dim V = m + n$, og vi trenger bare å vise:

$\mathrm{Im} f$ er endeligdimensjonalt og $\dim \mathrm{Im} f = n$.

Dette oppnår vi ved å vise at

$f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)$ er en basis for $\mathrm{Im}\, f$.

- La $\bar{v} \in V$. Da er
$$\bar{v} = a_1 \bar{u}_1 + \dots + a_n \bar{u}_n + b_1 \bar{v}_1 + \dots + b_n \bar{v}_n, \quad a_i, b_i \in F$$
og vi får
$$f(\bar{v}) = a_1 f(\bar{u}_1) + \dots + a_n f(\bar{u}_n) + b_1 f(\bar{v}_1) + \dots + b_n f(v_n)$$
$$= b_1 f(\bar{v}_1) + \dots + b_n f(\bar{v}_n)$$
Dette betyr at $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{span}(f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n))$.
- For å vise at $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)\}$ er lineært uavhengig, anta at
$$c_1 f(\bar{v}_1) + \dots + c_n f(\bar{v}_n) = \bar{0}.$$
Da blir
$$\bar{0} = f(c_1 \bar{v}_1 + \dots + c_n \bar{v}_n),$$

som vil si $c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n \in \text{Ker } f$

Siden $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ er en basis for Ker f

finnes det $d_1, \dots, d_m \in F$ slik at

$$c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n = d_1\bar{u}_1 + \dots + d_m\bar{u}_m .$$

Siden $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært

uavhengig, impliserer denne siste ligninga at

$$d_1 = \dots = d_m = c_1 = \dots = c_n = 0 .$$

$\square$

L6

Isomorfi

Def

En lineærtransformasjon $f \in \mathrm{Hom}_F(V,W)$ er inverterbar hvis det finnes en lineærtransformasjon $g \in \mathrm{Hom}_F(W,V)$ slik at $f \circ g = \mathrm{id}_W$ og $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Terminologi

- Hvis g som i definisjonen finnes, så kalles den en invers av f. Skal vise selv at g er entydig, så vi kan si inversen.
- En inverterbar lineærtransformasjon kalles en isomorfi. To vektorrom er isomorfe hvis det finnes en isomorfi mellom dem.

Eks

La $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x,y) = (x+y,\ 2x-y).$$

Da er f inverterbar, fordi lineær-transformasjonen $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$g(x,y) = \tfrac{1}{3}\cdot(x+y,\ 2x-y),$$

er en invers av f.

PROPOSISJON

En lineærtransformasjon er inverterbar hvis og bare hvis den er injektiv (1–1) og surjektiv (på)

BEVIS

La $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. Anta at f er inverterbar, med invers $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

- f er injektiv: Det holder å vise at $\mathrm{Ker} f = \{\bar{0}\}$. Så la $\bar{v} \in \mathrm{Ker} f$. Da er $f(\bar{v}) = \bar{0}$, men da blir $\bar{0} = f^{-1}(\bar{0}) = f^{-1}(f(\bar{v})) = \bar{v}$, i.e., $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.
- f er surjektiv: Vi må vise at hver $\bar{w} \in W$ er på formen $\bar{w} = f(\bar{v})$ for en $\bar{v} \in V$. Prøv med $\bar{v} = f^{-1}(\bar{w}) \in V$. Da blir
  $$f(\bar{v}) = f(f^{-1}(\bar{w})) = \bar{w}$$, så $\mathrm{Im} f = W$.

Det gjenstår å vise, for dere, at hvis f er injektiv og surjektiv, så er f inverterbar. $\square$

MERK

En lineærtransformasjon $f : V \longrightarrow W$ er en isomorfi $\iff$ $\mathrm{Ker}\, f = \{\bar{0}\}$ og $\mathrm{Im}\, f = W$. $\square$

Eks

Definér $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$ ved $f(\bar{e}_i) = x^{i-1}$ for hver $1 \leq i \leq n$.

- $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$, opplagt
- $f(\bar{e}_1), \ldots, f(\bar{e}_n)$ er lineært uavhengig, så $\dim \operatorname{Im} f = n = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$, altså $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$.

Dermed er f en isomorfi.

V7

Matriser

Dagens poeng

Ta V og W med $\dim V = n$, $\dim W = m$.
Så snart vi har valgt ordna basiser for V og W, så er vektorrommet $\mathrm{Hom}_F(V,W)$ $\underbrace{\text{"det samme som"}}_{\text{isomorft med}}$ vektorrommet $M_{m,n}(F)$.

Merk

En ordnet basis for V er en basis med en rekkefølge.

Eks

For $\mathbb{R}^n$ bruker vi $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ som vår standard ordna basis

Eks

For $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ er $\{1, x, \dots, x^n\}$ vår standard ordna basis.

DEF

La $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ være en ordna basis for V. For hver $\bar{v} \in V$ har vi et entydig uttrykk

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n,$$

og koordinatvektoren til $\bar{v}$ i β er

$$[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n$$

EKS

Koordinatvektoren til $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ (i standard-basisen) er bare $\bar{v}$ selv.

EKS

Se på $p = 3 + x - 4x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Med basisen $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ blir

$$[p]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Konstruksjon

La $f: V \to W$ være lineær og la
$$\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V \text{ og } \gamma = \{\bar{w}_1, \dots, w_m\} \subset W$$
være ordna basiser.

For hver $j = 1, \dots, n$ finnes entydige skalarer $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj} \in F$ slik at
$$f(\bar{v}_j) = a_{1j}\bar{w}_1 + a_{2j}\bar{w}_2 + \dots + a_{mj}\bar{w}_m$$

Matrisa A definert ved $A_{ij} = a_{ij}$ er matriserepresentasjonen av f i basisene β og γ.
Vi skriver $A = [f]_\beta^\gamma$.

Merk

- Matrisa $[f]_\beta^\gamma$ bestemmer f entydig!
- Kolonne nummer j i matrisa A er bare koordinatvektoren $[f(\bar{v}_j)]_\gamma$.

Eks

La $f \in \mathrm{Hom}_F(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ være gitt ved
$$f(x,y) = (x + 3y,\ 2x + 5y,\ 7x + 9y).$$
Da er
$$f(1,0) = (1,2,7) \text{ og } f(0,1) = (3,5,9),$$
altså
$$[f]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},$$
hvor $\beta \subset \mathbb{R}^2$ og $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ er standardbasisene.

Eks

La $D : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ være derivasjon.

Her får vi:

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow [D(1)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow [D(x)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow [D(x^2)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \Rightarrow [D(x^3)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Det betyr at
$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hvor vi har brukt standardbasisene

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$
$$\gamma = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

TEOREM

La V og W være endeligdimensjonale og velg ordna basiser $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$. Da er

$$\Phi : \mathrm{Hom}_F(V,W) \longrightarrow M_{m,n}(F)$$

gitt ved

$$\Phi(f) = [f]_\beta^\gamma$$

en isomorfi.

BEVIS

Vi må vise at Φ er en lineær transformasjon og at Φ er inverterbar.

Φ er lineær:

La $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ og $\gamma = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$. Da finnes entydige $a_{ij}, b_{ij} \in F$ slik at

$$f(\bar{v}_j) = a_{1j}\bar{w}_1 + \dots + a_{mj}\bar{w}_m \quad \text{og}$$

$$g(\bar{v}_j) = b_{1j}\bar{w}_1 + \dots + b_{mj}\bar{w}_m, \quad \text{så}$$

$$(f+g)(\bar{v}_j) = (a_{1j}+b_{1j})\bar{w}_1 + \dots + (a_{mj}+b_{mj})\bar{w}_m.$$

Det vil si at

$$\Phi(f+g)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Samtidig er det klart at

$$(\Phi(f) + \Phi(g))_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Beviset for at $\Phi(af) = a\Phi(f)$ tar dere selv!

Φ er inverterbar:

La $A \in M_{m,n}(F)$ være en vilkårlig matrise.
Vi må vise at det eksisterer en entydig $f \in Hom_F(V, W)$ slik at $A = \Phi(f) = [f]_\beta^\gamma$.

La $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ og $\gamma = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$.
Teoremet fra forelesning V5 sier nettopp at det eksisterer en entydig lineærtransformasjon $f : V \to W$ som er slik at

$$f(\bar{v}_j) = A_{1j}\bar{w}_1 + \dots + A_{mj}\bar{w}_m,$$

altså

$$A = [f]_\beta^\gamma.$$

$\square$

L7

MER OM MATRISEREPRESENTASJON

TEOREM

La U, V og W være endeligdimensjonale med ordna basiser $\alpha \subset U$, $\beta \subset V$, $\gamma \subset W$, og la $f: U \longrightarrow V$ og $g: V \longrightarrow W$ være lineære. Da er

$$[g \circ f]_\alpha^\gamma = [g]_\beta^\gamma \cdot [f]_\alpha^\beta$$

komposisjon av funksjoner — multiplikasjon av matriser

BEVIS

En øvelse i matrisemultiplikasjon. $\square$

TEOREM (bevis etterpå)

La V og W være endeligdimensjonale med ordna basiser $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$, og la $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$[f(\bar{v})]_\gamma = [f]_\beta^\gamma \cdot [\bar{v}]_\beta .$$

vektor — matrise — multiplikasjon

ET BILDE (> 1000 ORD)

La $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ og $\gamma = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$. Husk at "å ta koordinatvektor" gir isomorfier

$$\phi_\beta : V \longrightarrow F^n \quad \text{og} \quad \phi_\gamma : W \longrightarrow F^m .$$

Da sier TEOREM at

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_\beta"'] & W \arrow[d, "\phi_\gamma"] \\ F^n \arrow[r, "\substack{\text{multiplikasjon} \\ \text{med matrisa } [f]_\beta^\gamma}"'] & F^m \end{tikzcd}$$

De to måtene å følge pilene fra V til F^m, gir den samme lineærtransformasjonen $V \to F^m$.

er et kommutativt diagram!

EKSEMPEL

Se på derivasjon som en lineærtransformasjon

$$D: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$

og la

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$
$$\gamma = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

Vi har sett at

$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Velg $p = 5 + 3x - 7x^2 - 4x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Da er

$$[D(p)]_\gamma = [3 - 14x - 12x^2]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

På den annen side er

$$[D]_\beta^\gamma [p]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

TEOREM (igjen)

La V og W være endeligdimensjonale med ordna basiser $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$, og la $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$[f(\bar{v})]_\gamma = [f]_\beta^\gamma \cdot [\bar{v}]_\beta .$$

$\leftarrow$ vektor

matrise

multiplikasjon

BEVIS FOR TEOREM

La $\bar{v} \in V$ være vilkårlig. Definér

$$\psi_{\bar{v}} : F \to V \quad \text{og} \quad \theta_{\bar{v}} : F \to W$$

ved

$$\psi_{\bar{v}}(a) \overset{\dagger}{=} a\bar{v} \quad \text{og} \quad \theta_{\bar{v}}(a) \overset{*}{=} a f(\bar{v}).$$

Merk at $\theta_{\bar{v}} = f \circ \psi_{\bar{v}}$.

Skriv $\alpha = \{1\} \subset F$. Siden α er en ordna basis for F kan vi bruke TEOREM fra V7 og få

$$[f(\bar{v})]_\gamma \overset{*}{=} [\theta_{\bar{v}}(1)]_\gamma = [\theta_{\bar{v}}]_\alpha^\gamma$$
$$= [f \circ \psi_{\bar{v}}]_\alpha^\gamma$$
$$= [f]_\beta^\gamma [\psi_{\bar{v}}]_\alpha^\beta$$
$$= [f]_\beta^\gamma [\psi_{\bar{v}}(1)]_\beta \overset{\dagger}{=} [f]_\beta^\gamma [\bar{v}]_\beta$$

hvor vi tolker kolonnevektorer som matriser $\square$

V8

Bytte av basis

DEF

La V være endeligdimensjonalt og la β og β' være ordna basiser for V. Matrisa $[id_V]^{\beta}_{\beta'}$ kalles **overgangsmatrisa** fra basisen β' til basisen β.

PROPOSISJON

Skriv $Q = [id_V]^{\beta}_{\beta'}$

- Matrisa Q er inverterbar (id_V er en inverterbar lineartransformasjon).

jekk
elv!

- For hver $\bar{v} \in V$ har vi: $[\bar{v}]_{\beta} = Q \cdot [\bar{v}]_{\beta'}$.
  Altså: Ved å multiplisere med Q bytter vi basis fra β' til β.
- La $f: V \longrightarrow V$ være lineær. Da har vi:
  $[f]_{\beta'} = Q^{-1} [f]_{\beta} Q$. $\square$

HUSK

Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ og $\beta' = \{\bar{v}_1', \dots, \bar{v}_n'\}$, så er **kolonne nummer k i Q** lik koordinatvektoren $[\bar{v}_k']_{\beta}$.

Eks

For $\mathbb{R}^2$ har vi basises $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta' = \{(1,1),(2,1)\}$.

- Overgangsmatrisa fra β' til β er

$$Q = [id_{\mathbb{R}^2}]_{\beta'}^{\beta} = \left([(1,1)]_\beta \;\middle|\; [(2,1)]_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hvis $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ har koordinatvektor $[\bar{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ i basisen, så har $\bar{v}$ koordinatvektor

$$[\bar{v}]_\beta = Q[\bar{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i standardbasisen β.

- Overgangsmatrisa fra β til β' er $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

For eksempel får vi

$$[id_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\beta'} [\bar{v}]_\beta = Q^{-1}[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = [\bar{v}]_{\beta'}.$$

Eks

La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved ortogonal projeksjon til xy-planet, det vil si $f(x,y,z) = (x,y,0)$.
For $\mathbb{R}^3$ har vi ordna basiser

$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\beta' = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

- Matriserepresentasjonen til f i basisen β er

$$[f]_\beta = \left([f(1,0,0)]_\beta \mid [f(0,1,0)]_\beta \mid [f(0,0,1)]_\beta \right)$$

$$= \left([(1,0,0)]_\beta \mid [(0,1,0)]_\beta \mid [(0,0,0)]_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Overgangsmatrisa fra β' til β er

$$Q = \left([(1,0,0)]_\beta \mid [(1,1,0)]_\beta \mid [(1,1,1)]_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

· Matriserepresentasjonen til f: basisen β' blir

$$[f]_{\beta'} = Q^{-1} [f]_\beta Q$$

$$= Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8. La $f\colon V \longrightarrow W$ være lineær. Vis at hvis $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)\}$ er lineært uavhengig i W, så er $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ lineært uavhengig i V.

Anta $\bar{0} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n$

Vil vise: $a_1 = \dots = a_n = 0$

Brukes f:

$$\bar{0} = f(\bar{0}) = a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n)$$

Per antagelse blir $a_1 = \dots = a_n = 0$ $\square$

Oppgave 5. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en injektiv lineærtransformasjon. Vis at hvis $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig i V, så er $\{f(\bar{v}_1), \ldots, f(\bar{v}_n)\}$ lineært uavhengig i W.

Anta $\bar{0} = a_1 f(\bar{v}_1) + \ldots + a_n f(\bar{v}_n)$

Vil vise: $a_1 = \ldots = a_n = 0$

f lineær $\Rightarrow \bar{0} = f(a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n)$,

i.e. $a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n \in \operatorname{Ker} f$

Per antagelse: $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$,

altså $\bar{0} = a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n$.

Per antagelse: $a_1 = \ldots = a_n = 0$ $\square$

V9

ANVENDELSE:
HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENSIALLIGNINGER
(MED KONSTANTE KOEFFISIENTER)

OPPSETT

Vi skal løse ligninger av typen
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \quad (*)$$
hvor

- $y^{(i)}$ er den i-te deriverte av $y = y(t)$,
- $a_0, \dots, a_n$ er konstanter.

MERK

Hvis $a_n \neq 0$, så kan vi anta at $a_n = 1$.
(Løsningene av $(*)$ er de samme som løsningene av $y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} y^{(1)} + \frac{a_0}{a_n} y = 0$.)

VÅRT PERSPEKTIV

Tenk på løsningene av $(*)$ som et vektorrom!
Men hvilket vektorrom?

- Det er beleilig å betrakte løsningene av $(*)$ som funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Altså er vi i (det enorme) vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$.

- Man kan vise at enhver løsning av (*) har deriverte av alle ordener. Altså trenger vi bare å lete etter løsninger i underrommet

$$C^\infty := \{ f \mid f^{(k)} \text{ eksisterer } \forall k \geq 0 \} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Vi kan beskrive løsningene av (*) som vektorene i kjernen til en lineær operator på C^∞!

DEF

Til ligninga $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$ assosierer vi polynomet

$$p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

KONSTRUKSJON

Funksjonen $D : C^\infty \to C^\infty$ gitt ved $D(f) = f'$ er lineær (sjekk). Derfor er uttrykket

$$p(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \, id_{C^\infty}$$

en lineær operator på C^∞. Merk at

- $D^i = D \circ D \circ \dots \circ D$
- $+$ er sum av funksjoner

Nå er poenget at ligninga

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

er den samme som

$$0 = (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \, id)(y) = p(D)(y).$$

OBSERVASJON

Mengden av alle løsninger av en homogen lineær differensialligning med konstante koeffisienter er nøyaktig kjernen $\operatorname{Ker} p(D)$ til den lineære operatoren $p(D): C^\infty \to C^\infty$, hvor $p(t)$ er polynomet til ligninga $\square$

DEF

Løsningsrommet til ligninga er kjernen til $p(D)$.

NYTT MÅL

Finne en **vektorromsbasis** for $\operatorname{Ker} p(D)$!

TEOREM (!)

$\dim(\operatorname{Ker} p(D)) = \deg p \; (= n)$. $\square$

Deler kommer som oppgaver!

ALTSÅ

For å finne en basis for løsningsrommet trenger vi bare **n lineært uavhengige løsninger** !

HUSK (ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM)

Polynomet p kan skrives

$$p(t) = (t-c_1)(t-c_2) \cdots (t-c_n)$$

for $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Hva hvis $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$?

- Hver vektor i mengden

$$B = \{e^{ct}, t e^{ct}, t^2 e^{ct}, \ldots, t^{n-1} e^{ct}\}$$

er en løsning av ligninga (*) (sjekk).

- Mengden B er lineært uavhengig i C^∞:

Anta nemlig at

$$b_0 e^{ct} + b_1 t e^{ct} + \cdots + b_{n-1} t^{n-1} e^{ct} = 0$$

for skalarer $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Ved å dele på e^{ct} får vi:

$$b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1} t^{n-1} = 0,$$

altså null-polynomet, så $b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0$.

Det vil si at B er en basis for løsningsrommet til differensialligninga.

Hva hvis $c_i \neq c_j \quad \forall \; i \neq j$?

- Hver vektor i mengden
  $$B = \{ e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, \dots, e^{c_n t} \}$$
  er en løsning av ligninga (*) (sjekk).
- Mengden B er lineært uavhengig i C^∞:
  Anta at
  $$b_1 e^{c_1 t} + \dots + b_n e^{c_n t} \overset{(\dagger)}{=} 0.$$
  Vi bruker induksjon på n for å vise at hver $b_i = 0$:
    + Tilfellet $n = 1$ er klart
    + Anta at vi har vist påstanden for $n-1$ summander. Hvis vi bruker den lineære operatoren $D - c_n \cdot id$ på $(\dagger)$, så får vi
    $$\begin{aligned} 0 &= (D - c_n \cdot id)(b_1 e^{c_1 t} + \dots + b_n e^{c_n t}) \\ &= D(b_1 e^{c_1 t} + \dots + b_n e^{c_n t}) \\ &\quad - (c_n b_1 e^{c_1 t} + \dots + c_n b_n e^{c_n t}) \\ &= c_1 b_1 e^{c_1 t} + \dots + \cancel{c_n b_n e^{c_n t}} \\ &\quad - c_n b_1 e^{c_1 t} - \dots - \cancel{c_n b_n e^{c_n t}} \\ &= (c_1 - c_n) b_1 e^{c_1 t} + \dots + (c_{n-1} - c_n) b_{n-1} e^{c_{n-1} t}. \end{aligned}$$
    Vi har $c_i - c_n \neq 0 \quad \forall \; i = 1, \dots, n-1$, så induksjonshypotesen gir $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$, som innsatt i $(\dagger)$ gir at også $b_n = 0$.

Det vil si at mengden B er en basis for løsningsrommet!

TEOREM

Hvis en homogen og lineær differensialligning med konstante koeffisienter har sitt polynom på formen

$$(t-c_1)^{n_1}(t-c_2)^{n_2}\cdots(t-c_k)^{n_k}$$

med distinkte $c_i \in \mathbb{C}$, så er

$$\{e^{c_1 t}, te^{c_1 t}, \dots, t^{n_1-1}e^{c_1 t}, \dots\dots, e^{c_k t}, te^{c_k t}, \dots, t^{n_k-1}e^{c_k t}\}$$

en basis for løsningsrommet til ligninga. $\square$

EKSEMPEL

Ligninga $y'' - 5y' - 6y = 0$ har polynomet

$$t^2 - 5t - 6 = (t-6)(t+1),$$

som har røttene 6 og -1. En vilkårlig løsning av ligninga er derfor på formen

$$y = c_1 e^{6t} + c_2 e^{-t}.$$

Oppgave 7 (Utfordring). La ∞ og $-\infty$ være to symboler og definér en addisjon og en skalarmultiplikasjon på mengden

$$V = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

slik du kanskje ville gjette. Eksplisitt lar vi sum og produkt av to reelle tall være som vanlig, og for hver $x \in \mathbb{R}$ innfører vi regnereglene

$$\begin{aligned} x + \infty &= \infty + x = \infty, \\ x + (-\infty) &= (-\infty) + x = -\infty, \\ \infty + \infty &= \infty, \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty, \\ \infty + (-\infty) &= 0, \end{aligned}$$

$$x \cdot \infty = \begin{cases} -\infty & \text{hvis } x < 0, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ \infty & \text{hvis } x > 0, \text{ og} \end{cases}$$

$$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} \infty & \text{hvis } x < 0, \\ 0 & \text{hvis } x = 0, \\ -\infty & \text{hvis } x > 0. \end{cases}$$

$(\infty + (-\infty)) + 1 = 0 + 1 = 1$

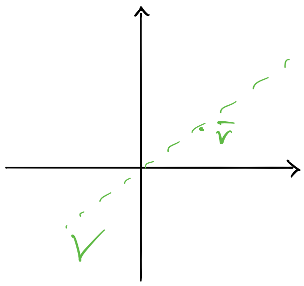
$\infty + ((-\infty) + 1) = \infty + (-\infty) = 0$

Blir V et vektorrom over $\mathbb{R}$?

NEI

Oppgave 6 (Utfordring)**.** Beskriv alle underrommene av vektorrommet $\mathbb{R}^2$.

$V \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\dim V \in \{0, 1, 2\}$



V er enten

- $\{\bar{0}\}$
- $\mathbb{R}^2$
- ei (rett) linje gjennom origo.

$\dim V = 0 \Rightarrow V = \{\bar{0}\}$

$\dim V = 2 \Rightarrow V = \mathbb{R}^2$

$\dim V = 1 \Rightarrow V = \operatorname{span}(\bar{v}) = \{t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

V10

Anvendelse:

Økonomiske modeller (etter Leontief)

Eksempel

En tømrer, en elektriker, og en rørlegger skal jobbe 10 dager i hverandres hus, fordelt som følger.

	Arbeid utført av T	E	R
Arbeidsdager hos T	2	1	6
Arbeidsdager hos E	4	5	1
Arbeidsdager hos R	4	4	3

Håndverkerne skal ha lønn for arbeidet (også fra seg selv).

Hva må dagslønna til T, E, og R være for at alle tre skal gå i null?

Skriv p_T = dagslønna til T i NOK
p_E = dagslønna til E i NOK
p_R = dagslønna til R i NOK

Premisset er altså at vi skal ha likevekten

totale inntekter = totale utgifter

for både T, E, og R. Dette gir oss tre ligninger:

$$\overbrace{10\,p_T}^{\text{Inntekten til } T} = \overbrace{2p_T + p_E + 6p_R}^{\text{Utgiftene for } T}$$

$$10\,p_E = 4p_T + 5p_E + p_R$$

$$10\,p_R = 4p_T + 4p_E + 3p_R$$

Dette er et homogent system:

$$\begin{aligned} 8p_T - p_E - 6p_R &= 0 \\ -4p_T + 5p_E - p_R &= 0 \\ -4p_T - 4p_E + 7p_R &= 0, \end{aligned}$$

som har løsning $\begin{pmatrix} p_T \\ p_E \\ p_R \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix},$ (Dette kan vi å regne ut fra MA1201!)

for hver $t \in \mathbb{R}$. For eksempel kan håndverkerne velge $t = 30$, som gir daglønningene

$p_T = 930,-$; $p_E = 960,-$; $p_R = 1080,-$.

GENERELL MODELL

Se på et økonomisk system som består av et endelig antall industrier;

industri 1, industri 2, ..., industri k.

I løpet av en viss tid vil hver industri stå for en produksjon som brukes helt opp av de k industriene, fordelt på en spesifisert måte.

Problemet: Finn priser for det som produseres, slik at inntekter = utgifter for hver av industriene.

Løsningen: For den aktuelle tidsperioden, la
p_i = prisen for den totale produksjonen til industri i,
e_{ij} = andel av den totale produksjonen fra industri j som industri i kjøper.

Da har vi betingelsene

a) $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$

b) $e_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, k$

c) $e_{1j} + e_{2j} + \ldots + e_{kj} = 1$, $j = 1, \ldots, k$.

Vi innføres

- prisvektoren $\bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ og

- input-output-matrisa $E = \underbrace{\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{pmatrix}}_{\text{Summen i hver kolonne er lik 1 pga c).}}$

Nå har vi oversatt problemet til det å løse ligninga $E\bar{p} = \bar{p}$, eller ekvivalent $(I - E)\bar{p} = \bar{0}$.

I: identitetsmatrisa av størrelse k.

TEOREM

Hvis $e_{ij} \geq 0$ for hver $i, j = 1, \ldots, k$, så har $(I-E)\bar{p} = \bar{0}$ en løsning $\bar{p}$ slik at $p_i \geq 0$ for hver $i = 1, \ldots, k$, og enhver løsning er et skalarmultiplum av denne. $\square$

Oppgave 4. Se på de komplekse tallene $z_1 = 1 + i$ og $z_2 = 1 - i$.

(1) Tenk på $\mathbb{C}$ som et vektorrom over $\mathbb{R}$.
Vis at mengden av vektorer $\{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$ er lineært uavhengig.

(2) Tenk på $\mathbb{C}$ som et vektorrom over $\mathbb{C}$.
Vis at mengden av vektorer $\{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$ er lineært avhengig.

(1) Anta lin. avh. Da $\exists\, a \in \mathbb{R}$ s.a.

$a z_1 = z_2 \Rightarrow a + ai = 1 - i$ $\lightning$

$\Rightarrow \{z_1, z_2\}$ lineært uavhengig. $\square$

(2) $-i z_1 = -i(1+i) = 1 - i = z_2$

$\Rightarrow \{z_1, z_2\}$ lineært avhengig. $\square$

Oppgave 5. Sjekk at i vektorrommet $\mathbb{R}[x]$ er
$$\text{span}\left(x^2+1, x+5, x+4\right) = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

La $V = \text{span}(x^2+1, x+5, x+4)$

Opplagt: $V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Holder å vise: $1, x, x^2 \in V$

$\bar{u} = x^2+1$; $\bar{v} = x+5$; $\bar{w} = x+4$

- $1 = \underbrace{\bar{v}}_{\in V} - \underbrace{\bar{w}}_{\in V} \in V$
- $x^2 = \underbrace{\bar{u}}_{\in V} - \underbrace{1}_{\in V} \in V$
- $x = \underbrace{5\bar{w}}_{\in V} - \underbrace{4\bar{v}}_{\in V} \in V$. $\square$