Oppgave 2. La U være et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom V. Vis at

(a) P_U er en lineær operator på V,

(b) $P_U(\bar{u}) = \bar{u}$ for hver $\bar{u} \in U$,

(c) $P_U(\bar{w}) = \bar{0}$ for hver $\bar{w} \in U^\perp$,

(d) $\operatorname{Im} P_U = U$,

(e) $\operatorname{Ker} P_U = U^\perp$,

(f) $\bar{v} - P_U(\bar{v}) \in U^\perp$ for hver $\bar{v} \in V$,

(g) $(P_U)^2 = P_U$,

(h) $||P_U(\bar{v})|| \leq ||\bar{v}||$ for hver $\bar{v} \in V$ og

(i) hvis $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ er en ortonormal basis for U, så er

$$P_U(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \ldots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n.$$

For hver $\bar{v} \in V$ har vi

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med

entydige $\bar{u} \in U$; $\bar{w} \in U^\perp$.

Vi definerer $P_U(\bar{v}) = \bar{u}$.

b) $\bar{u} \in U \Rightarrow \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} \Rightarrow P_U(\bar{u}) = \bar{u}$.

d) $\cdot\ P_U(\bar{v}) \in U \quad \forall\ \bar{v} \in V \Rightarrow \operatorname{Im} P_U \overset{*}{\subset} U$

$\cdot$ Fra b) er $\bar{u} \in \operatorname{Im} P_U(\bar{u})\ \forall\ \bar{u} \in U$, i.e. $U \overset{**}{\subset} \operatorname{Im} P_U$

$*$ og $**$ gir $\operatorname{Im} P_U = U$.

e) $\cdot\ \bar{w} \in U^\perp \Rightarrow \bar{w} = \bar{0} + \bar{w} \Rightarrow P_U(\bar{w}) = \bar{0}$, i.e. $U^\perp \overset{*}{\subset} \operatorname{Ker} P_U$

$\cdot\ \bar{v} \in \operatorname{Ker} P_U \Rightarrow \bar{v} = \bar{0} + \bar{v}$, så $\bar{v} \in U^\perp$, i.e. $\operatorname{Ker} P_U \overset{**}{\subset} U^\perp$

$*$ og $**$ gir $\operatorname{Ker} P_U = U^\perp$.

i) Dette har vi bevist (PROPOSISJON fra V21)

(b) Finn et polynom $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som er slik at

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

for hver $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

La $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ ha indreproduktet gitt ved $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

Definer en lineær funksjonal $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\phi(p) = p(\tfrac{1}{2}).$$

Ved TEOREM fra V20 finnes en $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at

$$p(\tfrac{1}{2}) = \phi(p) = \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \forall \; p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

Det er altså denne q vi er ute etter!

Beviset for samme TEOREM avslører at

$$q = \phi(\bar{e}_1)\bar{e}_1 + \dots + \phi(\bar{e}_n)\bar{e}_n ,$$

hvor $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

For eksempel kan vi bruke

$\bar{e}_1(x) = 1$, $\bar{e}_2(x) = \sqrt{3}(-1+2x)$, $\bar{e}_3 = \sqrt{5}(1-6x+6x^2)$ (OPPG 1, SETT 20)

Vi får da $$q(x) = -\frac{3}{2} + 15x - 15x^2$$