Oppgave 10. La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V, og la $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ være egenverdiene for f (her er $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$).

(a) For hver $1 \leq i \leq n$, la β_i være en lineært uavhengig delmengde i egenrommet E_{λ_i}. Vis at unionen $\beta_1 \cup \ldots \cup \beta_n$ er lineært uavhengig i V.

(b) Vis at f er diagonaliserbar $\iff$ $\dim V = \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_n}$.

a) La $\beta_i = \{\bar{v}_{i1}, \ldots, \bar{v}_{im_i}\}$. Anta at

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \bar{v}_{ij} \quad (*) ,$$

Må vise: $a_{ij} = 0 \ \forall \ i,j$.

$$\Big(= \underbrace{a_{11}\bar{v}_{11} + \ldots + a_{1m_1}\bar{v}_{1m_1}}_{:= \bar{w}_1 \in \operatorname{span}(\beta_1) \subset E_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{a_{n1}\bar{v}_{n1} + \ldots + a_{nm_n}\bar{v}_{nm_n}}_{:= \bar{w}_n \in \operatorname{span}(\beta_n) \subset E_{\lambda_n}} \Big)$$

Vi har altså $\bar{w}_1 + \ldots + \bar{w}_n = \bar{0}$. Ved første PROPOSISJON fra V11 følger det at $\bar{w}_1 = \ldots = \bar{w}_n = \bar{0}$.

For hver $1 \leq i \leq n$ har vi altså

$$\bar{0} = \bar{w}_i = a_{i1}\bar{v}_{i1} + \ldots + a_{im_i}\bar{v}_{im_i}$$

Siden β_i er lineært uavhengig i E_{λ_i} impliserer dette at $a_{i1} = \ldots = a_{im_i} = 0$, så $a_{ij} = 0 \ \forall \ i,j$ i ligninga $(*)$. $\square$

Oppgave 7. La V være et reelt indreproduktrom og la $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ være lineært uavhengig. Vis at det finnes nøyaktig 2^n ortonormale mengder $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ i V som er slik at

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i) = \operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i)$$

for hver $i \in \{1, \dots, n\}$.

- For $i=1$ ber vi om $\operatorname{span}(\bar{v}_1) = \operatorname{span}(\bar{e}_1)$. Det er klart at det finnes 2 slike $\bar{e}_1$ (nemlig $\bar{e}_1 = \pm \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$).

- La $i > 1$. Anta at vi har valgt ortonormale $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}$ slik at $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}) = \operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1})$.

Gram-Schmidt $\rightsquigarrow$ $\bar{e}_i \in V$ s.a. $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i)$ er ortonormal og

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i) = \operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i) \quad (*)$$

La $\bar{e}_i' \in V$ være en vilkårlig vektor med disse egenskapene, i.e. $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i'$ ortonormal og

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i) = \operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}, \bar{e}_i'). \quad (**)$$

$(*)$ og $(**)$ gir $\bar{e}_i' \in \operatorname{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i)$, så

nyttig egenskap ved ortonormal basis!

$$\bar{e}_i' = \langle \bar{e}_i', \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{e}_i', \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i$$

$$= \langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i$$

$\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i'$ ortonormal mengde

Dette gir $|\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i' \rangle| = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\bar{e}_i' = \pm \bar{e}_i}}$

$\square$