Oppgave 5. Vis at enhver lineærtransformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er gitt ved matrisemultiplikasjon. Det vil si, hvis $f \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ så finnes ei matrise $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ slik at $f(\bar{v}) = A\bar{v}$ for hver $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

La β og γ være standardbasisene (ordna) for $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$, hhv. Da er

$$\bar{v} = [\bar{v}]_\beta \quad \forall \ \bar{v} \in \mathbb{R}^n$$
$$\bar{w} = [\bar{w}]_\gamma \quad \forall \ \bar{w} \in \mathbb{R}^m$$

Så la $A = [f]_\beta^\gamma$. Da blir

$$f(\bar{v}) = [f(\bar{v})]_\gamma = [f]_\beta^\gamma [\bar{v}]_\beta = A\bar{v} \quad \forall \ \bar{v} \in V. \quad \square$$

Oppgave 8 (Uformelt om grenser)**.** La $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_i, \ldots$ være en følge av reelle eller komplekse matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = (6, 7, 0)^T$.

1

a) $\lim_{i\to\infty} M_i = M$

$\iff$

$\lim_{i\to\infty} (M_i)_{a,b} = M_{a,b}$

i hver posisjon (a,b).

b) Skriv $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$.

så $A\bar{v}_1 = \bar{v}_1$, $A\bar{v}_2 = \frac{1}{2}\bar{v}_2$, $A\bar{v}_3 = \frac{1}{3}\bar{v}_3$.

$\underbrace{\text{Observér}}_{\text{Regn ut}}$ at $\bar{x} = \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\cdot\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\cdot\bar{v}_3$,

$A\bar{x} = A\left(\frac{2}{3}\bar{v}_1 + \frac{17}{6}\bar{v}_2 + \frac{5}{9}\bar{v}_3\right) = \frac{2}{3}\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{6}\bar{v}_2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}\bar{v}_3$

$A^2\bar{x} = A(A\bar{x}) = \frac{2}{3}\bar{v}_1 + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{17}{6}\bar{v}_2 + \frac{1}{3^2}\cdot\frac{5}{9}\bar{v}_3$.

$A^i\bar{x} = \frac{2}{3}\bar{v}_1 + \frac{1}{2^i}\cdot\frac{17}{6}\bar{v}_2 + \frac{1}{3^i}\cdot\frac{5}{9}\bar{v}_3$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} A^i\bar{x} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\bar{v}_1}}$