

L13

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{Hva er } A^{1000} ?}}$$

Egenverdier : 5 og 4

Egenrom : $E_5 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $E_4 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

⋮

$$A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{1000} & 0 \\ 0 & 4^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{1000} & 0 \\ 0 & 4^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \cdot 5^{1000} - 4^{1000} & -5^{1000} + 4^{1000} \\ 2 \cdot 5^{1000} - 2 \cdot 4^{1000} & -5^{1000} + 2 \cdot 4^{1000} \end{pmatrix}}}$$

La A være ei diagonaliserbar matrise med 0 og 1 som sine (eneste) egenverdier.

Finn A^k for hver $k \geq 1$.

FOR
EKSEMPEL

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \text{ diagonaliserbar} &\Rightarrow A = PDP^{-1} \\ &\Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Her er } D^k = D \quad \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \underline{A^k = PDP^{-1} = A} \quad \forall k \geq 1 \quad !!$$