

# L7

## MER OM MATRISEREPRESENTASJON

### TEOREM

La  $U, V$  og  $W$  være endeligdimensjonale med ordna basiser  $\alpha \subset U$ ,  $\beta \subset V$ ,  $\gamma \subset W$ , og la  $f: U \rightarrow V$  og  $g: V \rightarrow W$  være lineære. Da er

$$[g \circ f]_{\gamma}^{\alpha} = [g]_{\beta}^{\gamma} \cdot [f]_{\alpha}^{\beta}$$

Komposisjon av funksjoner      multiplikasjon av matriser

### BEVIS

En øvelse i matrisemultiplikasjon. □

### TEOREM (bevis etterpå)

La  $V$  og  $W$  være endeligdimensjonale med ordna basiser  $\beta \subset V$  og  $\gamma \subset W$ , og la  $f \in \text{Hom}_F(V, W)$ . For hver  $v \in V$  har vi:

$$[f(v)]_{\gamma} = [f]_{\beta}^{\gamma} \cdot [v]_{\beta}$$

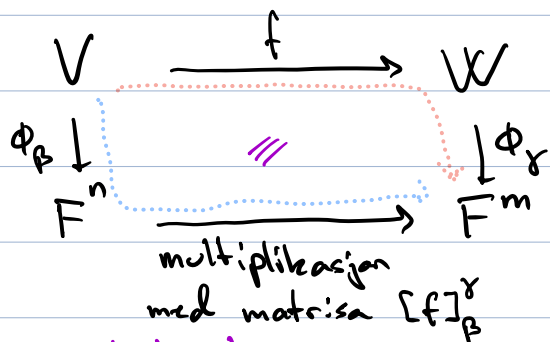
matrise      vektor      multiplikasjon

### ET BILDE (> 1000 ORD)

La  $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  og  $\gamma = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ . Husk at "å ta koordinatvektor" gir isomorfier

$$\phi_{\beta}: V \rightarrow F^n \quad \text{og} \quad \phi_{\gamma}: W \rightarrow F^m.$$

Da sier **TEOREM** at



De to måtene å følge pilene fra  $V$  til  $F^m$ , gir den samme lineærtransformasjonen  $V \rightarrow F^m$ .

er et kommutativt diagram!

### EKSEMPEL

Se på derivasjonen som en lineærtransformasjon  
 $D: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ ,

og la

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

$$\gamma = \{1, x, x^2\} \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

Vi har sett at

$$[D]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Velg  $p = 5 + 3x - 7x^2 - 4x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ .

Da er

$$[D(p)]_{\gamma} = [3 - 14x - 12x^2]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

På den annen side er

$$[D]_{\beta}^{\gamma} [p]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

## TEOREM (igjen)

La  $V$  og  $W$  være endeligdimensjonale med ordna basiser  $\beta \subset V$  og  $\gamma \subset W$ , og la  $f \in \text{Hom}_F(V, W)$ . For hver  $\bar{v} \in V$  har vi:

$$[f(\bar{v})]_{\gamma} = [f]_{\beta}^{\gamma} \cdot [\bar{v}]_{\beta}$$

*matrise*      *vektor*  
*multiplikasjon*

## BEVIS FOR TEOREM

La  $\bar{v} \in V$  være vilkårlig. Definér

$$\psi_{\bar{v}}: F \rightarrow V \quad \text{og} \quad \theta_{\bar{v}}: F \rightarrow W$$

ved

$$\psi_{\bar{v}}(a) \stackrel{\dagger}{=} a\bar{v} \quad \text{og} \quad \theta_{\bar{v}}(a) \stackrel{*}{=} af(\bar{v}).$$

Merk at  $\theta_{\bar{v}} = f \circ \psi_{\bar{v}}$ .

Skriv  $\alpha = \{1\} \subset F$ . Siden  $\alpha$  er en ordna basis for  $F$  kan vi bruke TEOREM fra V7

og få

$$\begin{aligned} [f(\bar{v})]_{\gamma} &\stackrel{*}{=} [\theta_{\bar{v}}(1)]_{\gamma} = [\theta_{\bar{v}}]_{\alpha}^{\gamma} \\ &= [f \circ \psi_{\bar{v}}]_{\alpha}^{\gamma} \\ &= [f]_{\beta}^{\gamma} [\psi_{\bar{v}}]_{\alpha}^{\beta} \\ &= [f]_{\beta}^{\gamma} [\psi_{\bar{v}}(1)]_{\beta} \stackrel{\dagger}{=} [f]_{\beta}^{\gamma} [\bar{v}]_{\beta} \end{aligned}$$

hvor vi tolker kolonnevektorer som matriser □



