L7

MER OM MATRISEREPRESENTASJON

TEOREM

La U, V og W være endeligdimensjonale med ordna basiser $\alpha \subset U$, $\beta \subset V$, $\gamma \subset W$, og la $f: U \longrightarrow V$ og $g: V \longrightarrow W$ være lineære. Da er

$$[g \circ f]_\alpha^\gamma = [g]_\beta^\gamma \cdot [f]_\alpha^\beta$$

komposisjon av funksjoner

multiplikasjon av matriser

BEVIS

En øvelse i matrisemultiplikasjon. $\square$

TEOREM (bevis etterpå)

La V og W være endeligdimensjonale med ordna basiser $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$, og la $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$[f(\bar{v})]_\gamma = [f]_\beta^\gamma \cdot [\bar{v}]_\beta .$$

vektor

matrise

multiplikasjon

ET BILDE (> 1000 ORD)

La $\beta = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ og $\gamma = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m\}$. Husk at "å ta koordinatvektor" gir isomorfier

$$\phi_\beta : V \longrightarrow F^n \quad \text{og} \quad \phi_\gamma : W \longrightarrow F^m .$$

Da sier TEOREM at

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & W \arrow[d, "\phi_\gamma"] \\ F^n \arrow[r, "\text{multiplikasjon med matrisa } [f]_\beta^\gamma"'] & F^m \end{tikzcd}$$

De to måtene å følge pilene fra V til F^m, gir den samme lineærtransformasjonen $V \to F^m$.

er et kommutativt diagram!

EKSEMPEL

Se på derivasjon som en lineærtransformasjon

$$D : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$

og la

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

$$\gamma = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

Vi har sett at

$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Velg $p = 5 + 3x - 7x^2 - 4x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Da er

$$[D(p)]_\gamma = [3 - 14x - 12x^2]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

På den annen side er

$$[D]_\beta^\gamma [p]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

TEOREM (igjen)

La V og W være endeligdimensjonale med ordna basiser $\beta \subset V$ og $\gamma \subset W$, og la $f \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

$$[f(\bar{v})]_\gamma = \underbrace{[f]_\beta^\gamma}_{\text{matrise}} \cdot \underbrace{[\bar{v}]_\beta}_{\text{vektor}}.$$

multiplikasjon

BEVIS FOR TEOREM

La $\bar{v} \in V$ være vilkårlig. Definér

$$\psi_{\bar{v}} : F \to V \quad \text{og} \quad \theta_{\bar{v}} : F \longrightarrow W$$

ved

$$\psi_{\bar{v}}(a) \overset{\dagger}{=} a\bar{v} \quad \text{og} \quad \theta_{\bar{v}}(a) \overset{*}{=} af(\bar{v}).$$

Merk at $\theta_{\bar{v}} = f \circ \psi_{\bar{v}}$.

Skriv $\alpha = \{1\} \subset F$. Siden α er en ordna basis for F kan vi bruke TEOREM fra V7 og få

$$\begin{aligned}
[f(\bar{v})]_\gamma \overset{*}{=} [\theta_{\bar{v}}(1)]_\gamma &= [\theta_{\bar{v}}]_\alpha^\gamma \\
&= [f \circ \psi_{\bar{v}}]_\alpha^\gamma \\
&= [f]_\beta^\gamma [\psi_{\bar{v}}]_\alpha^\beta \\
&= [f]_\beta^\gamma [\psi_{\bar{v}}(1)]_\beta \overset{\dagger}{=} [f]_\beta^\gamma [\bar{v}]_\beta
\end{aligned}$$

hvor vi tolker kolonnevektorer som matriser $\square$