L6

Isomorfi

Def

En lineærtransformasjon $f \in \mathrm{Hom}_F(V,W)$ er **invertebar** hvis det finnes en lineærtransformasjon $g \in \mathrm{Hom}_F(W,V)$ slik at $f \circ g = \mathrm{id}_W$ og $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Terminologi

- Hvis g som i definisjonen finnes, så kalles den en invers av f. Skal vise selv at g er entydig, så vi kan si **inversen**.
- En invertebar lineærtransformasjon kalles en **isomorfi**. To vektorrom er **isomorfe** hvis det finnes en isomorfi mellom dem.

Eks

La $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x,y) = (x+y\ ,\ 2x-y).$$

Da er f invertebar, fordi lineær-transformasjonen $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$g(x,y) = \tfrac{1}{3}\cdot(x+y\ ,\ 2x-y),$$

er en invers av f.

PROPOSISJON

En lineærtransformasjon er inverterbar hvis og bare hvis den er injektiv (1–1) og surjektiv (på)

BEVIS

La $f \in \mathrm{Hom}_F(V,W)$. Anta at f er inverterbar, med invers $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

- f er injektiv: Det holder å vise at $\mathrm{Ker} f = \{\bar{0}\}$. Så la $\bar{v} \in \mathrm{Ker} f$. Da er $f(\bar{v}) = \bar{0}$, men da blir $\bar{0} = f^{-1}(\bar{0}) = f^{-1}(f(\bar{v})) = \bar{v}$, i.e., $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.
- f er surjektiv: Vi må vise at hver $\bar{w} \in W$ er på formen $\bar{w} = f(\bar{v})$ for en $\bar{v} \in V$. Prøv med $\bar{v} = f^{-1}(\bar{w}) \in V$. Da blir

$$f(\bar{v}) = f(f^{-1}(\bar{w})) = \bar{w}, \quad \text{så} \quad \mathrm{Im} f = W.$$

Det gjenstår å vise, for dere, at hvis f er injektiv og surjektiv, så er f inverterbar. $\square$

MERK

En lineærtransformasjon $f: V \longrightarrow W$ er en isomorfi $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = \{\bar{0}\}$ og $\mathrm{Im}\, f = W$. $\square$

Eks

Definér $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$ ved $f(\bar{e}_i) = x^{i-1}$
for hver $1 \leq i \leq n$.

- $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$, opplagt
- $f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n)$ er lineært uavhengig, så $\dim \operatorname{Im} f = n = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$, altså $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$.

Dermed er f en isomorfi.