L5

Vektorrommet av lineærtransformasjoner

Konstruksjon

La $f, g : V \longrightarrow W$ være to lineærtransformasjoner.
Definér

$$f+g : V \longrightarrow W \quad \text{ved} \quad (f+g)(\bar{v}) = f(\bar{v}) + g(\bar{v}) \quad \forall v \in V.$$

addisjon i W.

For $a \in F$, definér

$$af : V \longrightarrow W \quad \text{ved} \quad (af)(\bar{v}) = a f(\bar{v}) \quad \forall v \in V$$

skalarmultiplikasjon i W.

Observasjon

$f+g$ og af er lineærtransformasjoner!

Bevis

Vi viser at $f+g$ er lineær:

La $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Da er

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\bar{u}+\bar{v}) &\overset{\text{Definisjon av } f+g}{=} f(\bar{u}+\bar{v}) + g(\bar{u}+\bar{v}) \\
&\overset{f \text{ og } g \text{ er lineære}}{=} f(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{u}) + g(\bar{v}) \\
&= f(\bar{u}) + g(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{v}) \\
&\overset{\text{Definisjon av } f+g}{=} (f+g)(\bar{u}) + (f+g)(\bar{v})
\end{aligned}
$$

For hver $a \in F$ er

$$
\begin{aligned}
(f+g)(a\bar{v}) &\overset{\text{Definisjon av } f+g}{=} f(a\bar{v}) + g(a\bar{v}) \\
&\overset{f \text{ og } g \text{ er lineære}}{=} a f(\bar{v}) + a g(\bar{v}) \\
&= a\left(f(\bar{v}) + g(\bar{v})\right) \\
&\overset{\text{Definisjon av } f+g}{=} a(f+g)(\bar{v})
\end{aligned}
$$

Dere viser selv at af er lineær $\square$

Definisjon

La
$$\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ er en lineærtransf} \}.$$

Proposisjon

Med addisjonen og skalarmultiplikasjonen over blir $\mathrm{Hom}_F(V,W)$ et vektorrom over F. $\square$

Hva gjenstår av beviset?