L3

TEOREM

La $U \subset V$ være et underrom. Hvis V er endeligdimensjonalt, så er U endeligdimensjonalt.

LEMMA 1

Hvis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\} \subset V$ er lineært avhengig, så finnes en $j \in \{1, \dots, m\}$ slik at

(i) $\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1})$

(ii) $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_m)$

BEVIS

(i): Siden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$ er lineært avhengig, kan vi skrive

$$a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_m = \bar{0}, \quad \text{minst én } a_i \neq 0.$$

La $j \in \{1, \dots, m\}$ være det største tallet slik at $a_j \neq 0$. Da er

$$(*) \quad \bar{v}_j = \frac{a_1}{a_j}\bar{v}_1 + \dots + \frac{a_{j-1}}{a_j}\bar{v}_{j-1} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}).$$

(ii) La $\bar{u} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$. Da finnes $c_1, \dots, c_m \in F$ slik at

$$\bar{u} = c_1\bar{v}_1 + \dots + c_m\bar{v}_m.$$

Her kan vi erstatte $\bar{v}_j$ med høyresida av $(*)$, som viser at

$$\bar{u} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, v_{j+1}, \dots, \bar{v}_m). \quad \square$$

LEMMA 2

La V være endeligdimensjonalt. Hvis $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\} \subset V$ er lineært uavhengig og $\{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n\} \subset V$ utspenner V, så er $m \leq n$.

BEVIS

Skriv $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n\}$. Anta at $V = \text{span}(\mathcal{B})$ og at $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ er lin. uavh.

Steg 1: Lista $\bar{v}_1, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n$ er lin. avh., siden $\bar{v} \in \text{span}(\mathcal{B}) = V$.

Tilfellet $j=1$ i LEMMA 1 impliserer $\bar{v}_1 \in \text{span}(\emptyset)$, altså $\bar{v}_1 = \bar{0}$!

Ved LEMMA 1 kan vi fjerne en $\bar{w}$ slik at den nye lista (av lengde n) også utspenner V.

Steg i: Etter steg $i-1$ har vi en liste av lengde n som utspenner V. Hvis vi legger til $\bar{v}_i$ til denne lista, så får vi en lineært avhengig mengde.

Den vektoren vi nå kan fjerne må være en $\bar{w}$, fordi: $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_i$ er lineært uavh.!

Ved LEMMA 1 kan vi fjerne enda en $\bar{w}$, og få en ny liste av lengde n som også utspenner V. Denne siste lista er på formen

$$\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_i, \bar{w}_{n-i}, \ldots, \bar{w}_n$$

Etter m steg er det tomt for $\bar{v}_i$-vektorer, men det finnes stadig en $\bar{w}_j$ som kan fjernes ved LEMMA 1. Altså $m \leq n$. $\blacksquare$

BEVIS FOR TEOREMET

La $U \subset V$ være et underrom med V endeligdimensjonalt

Steg 1: Hvis $U = \{\bar{0}\}$, så er U endeligdimensjonalt.

Steg i: Hvis $U = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$, så er U endeligdimensjonalt.

Hvis $U \neq \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$, så finnes $\bar{v}_i \in U \setminus \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$.

Etter hvert steg har vi en lineært uavhengig liste (LEMMA 1). Ved LEMMA 2 kan ikke denne lista være lenger enn er utspennende liste for hele V. Det betyr av prosessen til slutt må stoppe, så U er endeligdimensjonalt. $\square$