TEOREM

Ethvert vektorrom har en basis.

SETUP FOR BEVISET

La S være en ikke-tom mengde.

- En relasjon R på S er en delmengde av det kartesiske produktet $R \subset S \times S$. Vi skriver xRy hvis $(x,y) \in R$.
- En relasjon $\preceq$ på S er en delvis ordning dersom
  - i) $x \preceq x \quad \forall \; x \in S$,
  - ii) $x \preceq y$ og $y \preceq z$ impliserer $x \preceq z$,
  - iii) $x \preceq y$ og $y \preceq x$ impliserer $x = y$.

MERK

- Det er IKKE slik at $x \preceq y$ eller $y \preceq x$ $\forall x,y \in S$
- S med $\preceq$ kalles en delvis ordna mengde eller et poset (kort for partially ordered set).

EKSEMPEL

- Både $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, og $\mathbb{R}$ er poset, med de opplagte relasjonene.
- La S være mengden av alle delmengder av $\mathbb{R}$. Da er S et poset med relasjonen "inklusjon".

TERMINOLOGI

- Elementene $x, y \in S$ er sammenlignbare hvis $x \leq y$ eller $y \leq x$. Dersom $x, y \in S$ alltid er sammenlignbare, så er S ordna (eventuelt lineært ordna).
- Et element $x_0 \in S$ er maksimalt hvis $x \leq x_0$ for hver x som kan sammenlignes med x_0.
- En øvre skranke for en ikke-tom delmengde $T \subset S$ er et element $y_0 \in S$ slik at $y \leq y_0$ for hver $y \in T$.

For å bevise vårt TEOREM bruker vi:

ZORNS LEMMA

La S være et poset, og anta at enhver lineært ordna delmengde av S har en øvre skranke i S.

Da har S et maksimalt element. $\square$

MERK

- Hvis vi antar (de øvrige) ZF-aksiomene for mengdelære, så er ZORNS LEMMA ekvivalent med UTVALGSAKSIOMET.

BEVIS FOR TEOREMET

La V være et vektorrom (ingen krav om endeligdimensjonalitet). Vi skal faktisk vise noe sterkere enn teoremet, nemlig:

Hver ikke-null $\bar{v} \in V$ er en del av en basis for V.

La

$$S = \{ X \subset V \mid \bar{v} \in X \text{ og } X \text{ lineært uavhengig} \}.$$

Da blir S et poset under inklusjon (altså $X \leq Y$ betyr $X \subset Y$). Vi skal vise at S oppfyller antagelsene i ZORNS LEMMA:

Så ta en lineært ordna $T \subset S$. Vi vil vise at T har en øvre skranke $U \in S$, nemlig

U = unionen av alle elementer (altså mengder) i T.

Det er klart at U blir en øvre skranke for T dersom $U \in S$. Så la oss vise at $U \in S$:

- Det er klart at $\bar{v} \in U$.
- For å vise at U er lineært uavhengig, anta at vi har $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n \in U$ slik at

$$a_1 \bar{u}_1 + \ldots + a_n \bar{u}_n = \bar{0}, \quad \text{med } a_i \in F.$$

Men her er $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n \in P$ for en $P \in T$ (husk at T er lineært ordna). Denne P er lineært uavhengig, så $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Nå kan vi bruke ZORNS LEMMA til å
så at S har et maksimalt element $X_0 \in S$.
Da er X_0 lineært uavhengig i V og $\bar{v} \in X_0$.
Hvis X_0 ikke utspenner V, så finnes en
$\bar{w} \in V \setminus \text{span}(X_0)$. Men da er $X_0 \cup \{\bar{w}\}$
lineært uavhengig og inneholder $\bar{v}$. Dette
strider mot at X_0 er et maksimalt element.

Dermed må $\text{span}(X_0) = V$, så X_0 er
en basis for V. $\square$