MA1202
Vår 2020

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Løsningsforslag — Øving 3**

**2.1.2** $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$. Vi kan først sjekke at for $c \in \mathbb{R}$ og $v \in \mathbb{R}^3$ så er $T(cv) = cT(v)$. La $v = (a_1, a_2, a_3)$. Da er

$$T(cv) = (ca_1 - ca_2, 2ca_3) = c(a_1 - a_2, 2a_3) = cT(v)$$

som ønsket. La oss nå sjekke at gitt to vektorer $v, w \in \mathbb{R}^3$, så er $T(v + w) = T(v) + T(w)$. Hvis $v = (a_1, a_2, a_3), w = (b_1, b_2, b_3)$ så får vi:

$$\begin{aligned}
T(v + w) &= T(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) && (1)\\
&= (a_1 + b_1 - (a_2 + b_2), 2(a_3 + b_3)) && (2)\\
&= ((a_1 - a_2) + (b_1 - b_2), 2a_3 + 2b_3) && (3)\\
&= (a_1 - a_2, 2a_3) + (b_1 - b_2, 2b_3) && (4)\\
&= T(v) + T(w) && (5)
\end{aligned}$$

Vi vet at $X = \{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\}$ spenner ut hele bildet (Teorem 2.2). $X = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 2)\}$. Vi ser nå at $X$ spenner hele rommet $\mathbb{R}^2$ fordi $B = \{(1, 0), (0, 2)\} \subset X$ er en basis for $\mathbb{R}^2$ og for bildet.

For å finne en basis for kjernen til avbildningen (null-rommet) kan vi se på ligningen $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_3) = (0, 0)$. Vi ser da at $x_3 = 0$, og $x_1 = x_2$. Det betyr at om $T(x_1, x_2, x_3) = 0$ så er $(x_1, x_2, x_3) = (c, c, 0)$ for en $c \in \mathbb{R}$. Dermed er $\{(1, 1, 0)\}$ en basis for kjernen til $T$.

Nullity er 1, siden dimensjonen til kjernen er 1 (den har en basis med ett element). Rank er 2, fordi bildet har en basis med to elementer. Teorem 2.3, Dimensjonsteoremet, tilsier da i vårt tilfelle at $1 + 2 = 3$, som en enkel utregning kan bekrefte at stemmer.

**2.1.5** En basis for $P_2(\mathbb{R})$ er gitt ved $\{1, x, x^2\}$. Vi betrakter derfor vektorene $\{T(1), T(x), T(x^2)\} = \{x, x^2 + 1, x^3 + 2x\}$. Disse polynomene er alle av ulik grad, så de er linært uavhengige. Dermed er de en basis for avbildningsrommet.

Om $T(f(x)) = 0$, har vi at $xf(x) + f'(x) = 0$, altså at $f'(x) = -xf(x)$. Om $f(x) \neq 0$ av grad $n$, er $f'(x)$ av grad $n - 1$. Da kan ikke $f'(x) = -xf(x)$, da høyresiden er av grad $n + 1$. Dermed er det kun $f(x) = 0$, altså 0-vektoren i rommet som sendes til 0 av $T$. Dette betyr at kjernen har dimensjon 0, så nullity er 0. Rank er 3 som notert over. Dimensjonsteoremet sier her at $3 + 0 = 3$, som stemmer.

**2.1.13** Anta $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$. Da er $T(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = T(0) = 0$, og vi får

$$T(a_1v_1) + T(a_2v_2) + \cdots + T(a_nv_n) = 0$$

siden $T(a_i v_i) = a_i T(v_i) = a_i w_i$ for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ kan vi forenkle utrykket til

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n = 0$$

men siden $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ er linært uavhengig, må $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle være lik 0. Dermed er $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linært uavhengig.

$\boxed{\text{2.1.15}}$ $T$ er linær nettopp fordi regnereglene for integraler forteller oss at integrering er linært generelt (så lenge man jobber med funksjoner som kan integreres). For å vise at $T$ er injektiv, er det nok å vise at $T(f(x)) = 0 \implies f(x) = 0$ (merk; her bruker vi at $T$ er linær. Om man på forhånd ikke vet om $T$ er linær er ikke dette tilstrekkelig). La nå $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ være slik at $T(f(x)) = 0$. Da er

$$T(f(x)) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = 0$$

så vi ser at $a_i = 0$ for alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Så da må $f(x) = 0$.

$T$ er ikke surjektiv, fordi $T$ aldri kan treffe $f(x) = c, c \neq 0$, fordi fra argumentet over ser vi at $T(f(x))$ enten er 0 eller har grad minst 1.

$\boxed{\text{2.1.17}}$ La $n$ være dimensjonen til $V$ og $m$ dimensjonen til $W$.

**a)** $n < m$. Rangen til $T$ er mindre eller lik $n$, som følge av Teorem 2.2. Dermed er $T$ ikke surjektiv, da dimensjonen til bildet er lavere enn dimensjonen til $W$.

**b)** $n > m$. $T$ er injektiv hviss $T(x) = 0 \implies x = 0$, altså om nullrommet har dimensjon 0. Men dimensjonsteoremet sier i så fall at $0+\text{rank}(T) = n$. Men $\text{rank}(T) \leq m < n$, så $0 + \text{rank}(T) \neq n$. Altså er nullrommet av høyere dimensjon, og $T$ er ikke injektiv.

$\boxed{\text{2.1.38}}$ I følgende oppgave ser vi på $\mathbb{C}$; skalarmultiplikasjon er altså multiplikasjon med komplekse tall. Gitt to vilkårlige komplekse tall $z_1 = a_1 + b_1 i$ og $z_2 = a_2 + b_2 i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$), får vi $T(z_1 + z_2) = T(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = T(z_1) + T(z_2)$ som ønsket, så $T$ er additiv. Betrakt derimot $T(i^2) = T(-1) = -1$, men $iT(i) = i(-i) = - -1 = 1$, så $T$ er ikke linær.

$\boxed{\text{2.7.13b}}$ La $z$ være en gitt løsning til den ikke-homogene differensialligningen

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = x$$

Hvis $t$ er en vilkårlig løsning til samme ligning, så er $t - z$ en løsning til den homogene ligningen

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

Dermed kan enhver løsning $t$ skrives som $v + z$ for $v \in V$ (velg $v = t - z$). I tillegg kan vi se at for enhver så er $w \in V$ er $w + z$ en løsning til den ikke-homogene ligningen.