Alle svar skal begrunnes. Husk å ta med nok mellomregning til å vise hva du har gjort.

Oppgave 1 Vi har datasettet gitt i følgende tabell:

x	0	1	3	4
y	2.2	4.1	4.1	4.1

a) Bruk minste kvadraters metode til å finne en lineær funksjon $Y = aX + b$ som tilnærmer datasettet best mulig.

b) Bruk minste kvadraters metode til å finne en andregradsfunksjon $Y = aX^2 + bX + c$ som tilnærmer datasettet best mulig.

Oppgave 2 La $\mathbb{C}[X]$ være polynomene med komplekse koeffisienter. La $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ være gitt ved

$$\langle f(X), g(X) \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

a) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt på $\mathbb{C}[X]$.

b) Regn ut de fire indreproduktene

- $\langle 1, 1 \rangle$
- $\langle 1, X \rangle$
- $\langle 1, iX^2 \rangle$
- $\langle X, iX^2 \rangle$

c) Bruk Gram-Schmidt til å finne en ortogonal basis for underrommet spent ut av mengden $\{1, X, iX^2\}$.

Vi tenker på $\mathbb{C}[X]$ som et indreproduktrom med indreproduktet gitt over. La D være den sedvanlige derivasjonsoperatoren på indreproduktrommet ($D(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$), la I være identitetsoperatoren på indreproduktrommet og la U være operatoren $D - I$.

d) Har U en adjungert?

Oppgave 3 La A være en $n \times n$-matrise der hvert tall enten er 0 eller 1, og der hver kolonne har minst én 1-er. La ℓ_i være den $i$te kolonnesummen i A, og la D være diagonalmatrisen med $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ på diagonalen.

a) Vis at matrisen $B = AD^{-1}$ er en overgangsmatrise (*transition matrix*).

b) La E være $n \times n$-matrisen som består av bare 1-ere, og la d være et tall mellom 0 og 1 (dvs. $0 < d < 1$). La

$$C = dB + \frac{1-d}{n}E.$$

Vis at matrisen C er en overgangsmatrise.

c) Vis at C er regulær.

d) La $\vec{p}_0$ være en sannsynlighetsvektor. Forklar hvorfor grensen $\lim_{i\to\infty} C^i$ finnes og hva $\lim_{i\to\infty} C^i \vec{p}_0$ er.

Denne oppgaven utgjør lineæralgebragrunnlaget for PageRank, som blant annet kan brukes i søkemotorer.

Et **vektorrom** over en kropp $\mathbb{F}$ er en mengde V vektorer med en vektoraddisjon $+ : V \times V \to V$ og en skalarmultiplikasjon $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ slik at

1. $v + w = w + v$ for alle $v, w \in V$;
2. $(v + w) + z = v + (w + z)$ for alle $v, w, z \in V$;
3. det finnes $0 \in V$ slik at $0 + v = v$ for alle $v \in V$;
4. for hver $v \in V$ finnes $w \in V$ slik at $v + w = 0$;
5. $1v = v$ for alle $v \in V$;
6. $(ab)v = a(bv)$ for alle $v \in V$ og $a, b \in \mathbb{F}$;
7. $a(v + w) = av + aw$ for alle $v, w \in V$ og $a \in \mathbb{F}$; og
8. $(a + b)v = av + bv$ for alle $v \in V$ og $a, b \in \mathbb{F}$.

Et **indreprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ på et vektorrom V tilfredsstiller

1. $\langle v + w, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle$ for alle $v, w, z \in V$;
2. $\langle av, z \rangle = a\langle v, z \rangle$ for alle $v, z \in V$ og $a \in \mathbb{F}$;
3. $\langle v, z \rangle = \overline{\langle z, v \rangle}$ for alle $v, z \in V$; og
4. $\langle v, v \rangle \geq 0$ for alle $v \in V$, med likhet hvis og bare hvis $v = 0$.