NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Gjøsteen

Tlf: 73 55 02 42

Eksamensdato: 10. august 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $V = P_2(\mathbb{R})$ være vektorrommet av alle polynomer med reelle koeffisienter av grad høyst 2.

a) Vis at $\beta = \{1, X + 1, X^2 + X\}$ er en basis for V.

La $T : V \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $T(p(X)) = 2p'(1) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$.

b) Vis at T er en lineæravbildning.

c) La γ være standardbasisen for $\mathbb{R}$. Finn matrisen $[T]_\beta^\gamma$ og nullrommet til T.

La $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ være gitt ved $\langle p(X), q(X) \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$.

d) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt.

e) Vis at for enhver lineær funksjon f fra et endeligdimensjonalt (reelt) indreproduktrom W til $\mathbb{R}$ finnes $q_f \in W$ slik at $f(p) = \langle p, q_f \rangle$ for alle $p \in W$.

f) Finn $q(X)$ slik at $T(p(X)) = \langle p(X), q(X) \rangle$ for alle $p(X) \in V$.

Oppgave 2 Gitt følgende data:

x	-2	-1	1	2
y	2	1	1	1

Bruk minste kvadraters metode til å finne en funksjon på formen $ax+b$ som «passer godt» til dataene.

Oppgave 3 La $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La U være underrommet av $\mathbb{R}^n$ spent ut av de gitte vektorene $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_l\}$, $l < n$.

a) Vis at dersom du kjenner $a_1, a_2, \ldots, a_l$ slik at $f(\vec{y}_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, da kan du regne ut $f(\vec{u})$ for enhver $\vec{u} \in U$, og at $a_1, a_2, \ldots, a_l$ derfor bestemmer $f|_U$ entydig.

b) La $\vec{z} \in \mathbb{R}^n \setminus U$. Vis at for hvilken som helst b finnes en funksjon $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ slik at $f|_U = g|_U$ og $g(\vec{z}) = b$.

Oppgave 4 La W være et underrom av et endelig-dimensjonalt indreprodukt-rom V. Vis at om T er den ortogonale projeksjonen av V på W, da er $I - T$ den ortogonale projeksjonen av V på $W^{\perp}$.

Et **vektorrom** over en kropp $\mathbb{F}$ er en mengde V vektorer med en vektoraddisjon $+ : V \times V \to V$ og en skalarmultiplikasjon $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ slik at

1. $v + w = w + v$ for alle $v, w \in V$;
2. $(v + w) + z = v + (w + z)$ for alle $v, w, z \in V$;
3. det finnes $0 \in V$ slik at $0 + v = v$ for alle $v \in V$;
4. for hver $v \in V$ finnes $w \in V$ slik at $v + w = 0$;
5. $1v = v$ for alle $v \in V$;
6. $(ab)v = a(bv)$ for alle $v \in V$ og $a, b \in \mathbb{F}$;
7. $a(v + w) = av + aw$ for alle $v, w \in V$ og $a \in \mathbb{F}$; og
8. $(a + b)v = av + bv$ for alle $v \in V$ og $a, b \in \mathbb{F}$.

Et **indreprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ på et vektorrom V tilfredsstiller

1. $\langle v + w, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle$ for alle $v, w, z \in V$;
2. $\langle av, z \rangle = a\langle v, z \rangle$ for alle $v, z \in V$ og $a \in \mathbb{F}$;
3. $\langle v, z \rangle = \overline{\langle z, v \rangle}$ for alle $v, z \in V$; og
4. $\langle v, v \rangle \geq 0$ for alle $v \in V$, med likhet hvis og bare hvis $v = 0$.