NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA6202 Lineær algebra med anvendelser

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Gjøsteen

Tlf: 73 55 02 42

Eksamensdato: 1. juni 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Husk at du kan bruke resultater fra tidligere deloppgaver, selv om du ikke har klart å løse dem.

Oppgave 1 La

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A.
Hint: $-t^3 + 6t^2 + 15t + 8 = (t+1)^2(8-t)$.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A, men som ikke er ortogonal.

c) Finn en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A. Finn en matrise P slik at

$$P^T AP$$

er diagonal. Hvilke verdier vil du finne på diagonalen?

Oppgave 2 Gitt de lineært uavhengige vektorene $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1, -1)$ og $(-1, 1, 1, 1)$, bruk Gram-Schmidt til å finne en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ spent ut av vektorene.

Oppgave 3 I en landsby er det tre som jobber: en smed, en bonde og en iskremmaker. Smeden produserer verktøy, bonden produserer melk og bananer, og iskremmakeren produserer bananis.

- Smeden spiser x bananis for hvert verktøy som lages.
- Bonden trenger 1 verktøy for hver 3. enhet melk som produseres.
- Bonden trenger 1 verktøy for hver 7. banan som dyrkes.
- Iskremmakeren trenger 1 verktøy, 2 enheter melk og 2 bananer for hver bananis som lages.

a) Landsbyhøvdingen har funnet en bananisentusiast i hovedstaden som ønsker å kjøpe 100 bananis. Hvis smeden skal spise 1 bananis ($x = 1$) for hvert verktøy som lages, hvor mye av de fire varene produseres i landsbyen når produksjon og etterspørsel er i balanse? Eventuelt, forklar hvorfor det ikke er mulig å oppnå balanse.

b) Bananisentusiasten har gått lei. Dermed handler landsbyen ikke lenger med omverdenen. Hvor mange bananis (hva er x?) må smeden spise per verktøy for å få produksjon og etterspørsel i balanse?

Oppgave 4 La $\alpha = \exp(2\pi i/n)$ for en $n > 1$. I denne oppgaven skal vi se på den komplekse matrisen

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 1 & (\alpha^2) & (\alpha^2)^2 & \dots & (\alpha^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (\alpha^{n-1}) & (\alpha^{n-1})^2 & \dots & (\alpha^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Vis at $\alpha^j \neq 1$ og $\alpha^{-j} \neq 1$ for $j = 1, 2, \dots, n-1$, mens $\alpha^n = \alpha^0 = 1$.

Vis også at

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha^j)^k = 0 \qquad \text{og} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha^{-j})^k = 0$$

når $j = 1, 2, \dots, n-1$.

b) Vis at for $0 \leq l, m \leq n-1$ så er

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{lj} \alpha^{-jm} = \begin{cases} n & l = m, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

c) Vis at D_n er unitær.

d) Det kan vises at $D_n^4 = I$. Hva kan du si om egenverdiene til D_n?