NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Gjøsteen

Tlf: 73 55 02 42

Eksamensdato: August 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Husk at du kan bruke resultater fra tidligere deloppgaver, selv om du ikke har klart å løse dem. Husk også å begrunne alle svar. Aksiomer for vektorrom og indreprodukter står bak i oppgaven.

Oppgave 1 La V være mengden av alle brøker på formen

$$\frac{p(X)}{X-1}, \frac{q(X)}{X+1} \text{ og } \frac{r(X)}{X^2-1},$$

dvs. alle brøker der telleren er et polynom (med reelle koeffisienter) og nevneren er $X-1$, $X+1$ eller X^2-1.

Oppgaven tar utgangspunkt i følgende fire brøker fra V:

$$p_1(X) = \frac{X^3+2X+1}{X-1} \qquad p_2(X) = \frac{X^3+X-1}{X+1}$$

$$p_3(X) = \frac{2X^4+2X^2-X+1}{X^2-1} \qquad p_4(X) = \frac{X+1}{X-1}$$

a) Finn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ikke alle 0, slik at

$$ap_1(X) + bp_2(X) + cp_3(X) + dp_4(X) = 0.$$

b) Vis at V er et vektorrom (over de reelle tallene). Forklar hvorfor vektorene $p_1(X)$, $p_2(X)$, $p_3(X)$ og $p_4(X)$ er lineært avhengige.

La $S = \{p_1(X), p_2(X), p_3(X)\}$ og $W = \operatorname{span} S$. W har dimensjon 3.

c) La lineæravbildningen $f : W \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(p_1(X)) = (1,0) \qquad f(p_2(X)) = (0,1) \qquad f(p_3(X)) = (1,1).$$

Gi en basis for nullrommet til f.

Oppgave 2 Gitt de lineært uavhengige vektorene $(1,-1,1,1)$, $(-1,-1,1,1)$ og $(-1,1,1,1)$, bruk Gram-Schmidt til å finne en ortogonal basis for underrommet av $\mathbb{R}^4$ spent ut av de tre vektorene.

Oppgave 3 La V og W være to (reelle) indreproduktrom, der indreproduktet på V benevnes med $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ og indreproduktet på W benevnes med $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Husk at $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$, og at vi har naturlig addisjon og skalarmultiplikasjon gitt ved

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w') \qquad\qquad a(v, w) = (av, aw).$$

a) Vis at $V \times W$ er et vektorrom.

Definer

$$\langle (v, w), (v', w') \rangle_{V \times W} \stackrel{\text{def}}{=} \langle v, v' \rangle_V + \langle w, w' \rangle_W$$

b) Er $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \times W}$ et indreprodukt på $V \times W$? Begrunn svaret enten ved å bevise at det er et indreprodukt eller ved å gi et moteksempel.

Oppgave 4 La A være en reell 5×2-matrise, og la $W \subseteq \mathbb{R}^5$ være søylerommet (kolonnerommet) til A.

a) La $\vec{y} \in \mathbb{R}^5$, og la $\vec{y}_0$ være en vektor i W. Vis at avstanden fra $\vec{y}_0$ til $\vec{y}$ er minimal hvis og bare hvis vektoren $\vec{y} - \vec{y}_0$ er ortogonal på enhver vektor i W.

b) Vis at hvis A har rang 2, da er $A^T A$ invertibel.

c) La $\vec{y} \in \mathbb{R}^5$. Vis at hvis A har rang 2, da er vektoren $\vec{y} - A(A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$ ortogonal på W.

En bananisselger mistenker at det er en sammenheng mellom temperatur og etterspørsel etter bananis, og tror han kan optimalisere leverandørkjeden sin ved hjelp av værmeldingen. Han har samlet data om etterspørsel etter bananis og temperatur, og håper at en lineær funksjon vil være en god tilnærming for det interessante temperaturintervallet.

Han har følgende data:

Temperatur	20	21	22	23	24
Etterspørsel	1,2	1,25	1,3	1,45	1,5

d) Bruk minste kvadraters metode til å finne en tilnærmet lineær sammenheng mellom temperatur og etterspørsel.

Et **vektorrom** over en kropp $\mathbb{F}$ er en mengde V vektorer med en vektoraddisjon $+ : V \times V \to V$ og en skalarmultiplikasjon $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ slik at

1. $v + w = w + v$ for alle $v, w \in V$;
2. $(v + w) + z = v + (w + z)$ for alle $v, w, z \in V$;
3. det finnes $0 \in V$ slik at $0 + v = v$ for alle $v \in V$;
4. for hver $v \in V$ finnes $w \in V$ slik at $v + w = 0$;
5. $1v = v$ for alle $v \in V$;
6. $(ab)v = a(bv)$ for alle $v \in V$ og $a, b \in \mathbb{F}$;
7. $a(v + w) = av + aw$ for alle $v, w \in V$ og $a \in \mathbb{F}$; og
8. $(a + b)v = av + bv$ for alle $v \in V$ og $a, b \in \mathbb{F}$.

Et **indreprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ på et vektorrom V tilfredsstiller

1. $\langle v + w, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle$ for alle $v, w, z \in V$;
2. $\langle av, z \rangle = a\langle v, z \rangle$ for alle $v, z \in V$ og $a \in \mathbb{F}$;
3. $\langle v, z \rangle = \overline{\langle z, v \rangle}$ for alle $v, z \in V$; og
4. $\langle v, v \rangle \geq 0$ for alle $v \in V$, med likhet hvis og bare hvis $v = 0$.