Alle svar skal grunngjevast.

Oppgåve 1 Denne oppgåva gjeld omgrepet *å utspenne eit underrom.*

a) Lat V vere eit abstrakt vektorrom. Kva tyder det at ei mengd vektorar $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ utspenner eit underrom W?

b) Lat $\mathbf{M}_2$ vere vektorrommet av alle reelle 2×2 matriser. Lat

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(i) Finn span $\{A_1, A_2\}$.

(ii) Vil mengda $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ utspenne $\mathbf{M}_2$?

c) Lat V vere eit vektorrom med *indreprodukt.*
Lat $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ vere to vektorar i V og lat $W = \text{ span } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.
Vis at dersom $\mathbf{v}$ er ein vektor i V slik at $\mathbf{v}$ er ortogonal til både $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$, så er $\mathbf{v}$ i ortogonal til *alle* vektorar i W.

Oppgåve 2 Denne oppgåva omhandlar *ortogonale* matriser.

a) Skriv ned definisjonen av at ein matrise er ortogonal og gje eit eksempel på ein slik matrise.

b) Vis at hvis A er en ortogonal matrise så er også A^{-1} ein ortogonal matrise.

c) Vis at dersom A og B er ortogonale matriser så er også $A \cdot B$ ein ortogonal matrise.

d) Vis at dersom A er ein ortogonal matrise så er $\det(A) = 1$ eller -1.

Oppgåve 3 Denne oppgåva omhandler *lineær programmering.*

Maksimer funksjonen

$$z = 3x + \frac{11}{5}y$$

under vilkåra:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &\leq 37 \\ 3x + 2y &\leq 20 \\ 0 &\leq x \\ 0 &\leq y. \end{aligned}$$

Oppgåve 4 Sjå på fylgjande *system av differensiallikningar*:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = \quad 4\,y_2 - 12\,y_3 \\ y_3' = \quad\; y_2 - \;3\,y_3 \end{cases}$$

a) Skriv systemet på matriseform: $\mathbf{Y}\,' = A \cdot \mathbf{Y}$.

b) Diagonaliser matrisen A.

c) Finn den *generelle løysinga* av dette systemet.

d) Løys startverdiproblemet: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 0$.

Oppgåve 5 Denne oppgåva gjelder omgrepet *ortonormal basis.*
Lat $\mathbb{R}^3$ ha det euklidske indreproduktet, og sjå på vektorane

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1),\; \mathbf{u}_2 = (1, 0, -1),\; \mathbf{u}_3 = (2, 1, -1)\,.$$

a) Vis at mengda $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er ein basis for $\mathbb{R}^3$.

b) Gjev definisjonen av ein *ortonormal* basis i eit vektorrom.

c) Transformer basisen S til ein ortonormal basis.

d) Skriv vektoren $(0, 0, 1)$ som ein lineær kombinasjon av vektorane i den ortonormale basisen funne i (c).

Oppgåve 6 Denne oppgavå gjelder omgrepet *lineære transformasjoner*.
Lat $\mathbf{P}_2$ vere mengda av alle polynom av grad ≤ 2 og $B = \{1, x, x^2\}$ standard basisen i $\mathbf{P}_2$. Lat $T\colon \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ vere den lineære operatoren definert ved

$$T(p(x)) = (x+1) \cdot p'(x)\,,$$

der $p'(x)$ er den deriverte av $p(x)$.

a) Finn matrisen $[T]_{B,B}$ (matrisen til T relativt til standard basisen).
Forklar sammenhengen mellom $[T]_{B,B}$ og T ved hjelp av eit diagram.

b) Finn ein basis for $\ker(T)$.

c) Finn ein basis for $R(T)$.

d) Er T ein-ein? Er T på? Er T ein isomorfi? Svara skal grunngjevast.