Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt : Petter Andreas Bergh

Telefon: 92032532

Eksamen i MA1202 Lineær algebra med anvendelser

Bokmål
Mandag 4. juni 2012
Kl. 09.00–13.00 (4 timer)

Hjelpemidler: kode D (bestemt enkel kalkulator: HP30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 Se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 4 \\ -1 & 5 & 14 & 4 \\ -2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn en basis for nullrommet til A. Bestem rangen og nulliteten til matrisen A^T (dvs. $\text{rank}(A^T)$ og $\text{nullity}(A^T)$).

b) Finn en basis for kolonnerommet til A bestående av kolonnevektorer fra A.

Oppgave 2 For hvilke tall $a \in \mathbb{R}$ er de tre vektorene

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

lineært uavhengige?

Oppgave 3 La P_2 være vektorrommet av alle reelle polynomer av grad høyst lik 2, dvs.

$$P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

a) La $\langle -, - \rangle$ være indreproduktet på P_2 gitt ved

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(-1)g(-1)$$

(du trenger ikke å vise at dette blir et indreprodukt). Se på vektorene

$$f(x) = x + 3x^2, \quad g(x) = 1 - 6x + x^2, \quad h(x) = 1 + x + x^2,$$

og la W være underrommet av P_2 utspent av $f(x)$ og $g(x)$, dvs. $W = \operatorname{span}\{f(x), g(x)\}$. Finn $\operatorname{proj}_W h(x)$, dvs. den ortogonale projeksjonen av $h(x)$ på W (hint: vis at $f(x)$ og $g(x)$ er ortogonale).

b) Definer nå $\langle -, - \rangle$ til å være

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(3)q(3) + p(4)q(4).$$

Er dette et indreprodukt på P_2?

Oppgave 4 La V være underrommet av $M_{2\times 3}$ gitt ved

$$V = \{\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

og se på lineærtransformasjonen $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

(du trenger ikke å vise at dette blir en lineærtransformasjon).

a) Vis at T er surjektiv (på) men ikke injektiv (en-til-en).

b) Se på følgende basiser for V og $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\} \quad \text{(basis for } V\text{)} \\ \mathcal{B}' &= \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad \text{(basis for } \mathbb{R}^3\text{)} \end{aligned}$$

(du trenger ikke å vise at dette er basiser). Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Oppgave 5 La A være en kvadratisk matrise som er diagonaliserbar, og anta at $A^4 = A$. Vis at da må $A^2 = A$.