Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt : Petter Andreas Bergh
Telefon: 92032532

Semesterprøve i MA1202 Lineær algebra med anvendelser

Bokmål
Onsdag 10. mars 2010
Kl. 14.15–15.45 (90 minutter)

Hjelpemidler: kode D (bestemt enkel kalkulator: HP30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 Se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A.

b) Diagonaliser A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

Oppgave 2 Se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 1 & 4 & 6 \\ 9/5 & 3 & 6 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 25 \\ 1 & 5/3 & 10/3 & 11 \end{pmatrix}$$

a) Finn rangen og nulliteten til A (rank(A) og nullity(A)).

b) Finn en basis for kolonnerommet til A.

Oppgave 3 La P_4 være vektorrommet bestående av alle reelle polynomer av grad høyst 4, dvs.

$$P_4 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$$

(du trenger ikke å vise at dette er et vektorrom). Se på mengdene

$$\begin{aligned} V &= \{a + bx^2 + cx^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, \\ W &= \{a + bx + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

a) Vis at V og W er underrom av P_4, at $\mathcal{B}_1 = \{1, x^2, x^4\}$ er en basis for V, og at $\mathcal{B}_2 = \{1 + 2x, x + x^3, x^3\}$ er en basis for W.

b) Vis at avbildningen $T\colon V \to W$ gitt ved

$$T(p(x)) = p'(x) \quad \left(= \frac{d}{dx}p(x)\right)$$

er en lineær transformasjon. Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ med hensyn på basisene $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$.

c) Finn dimensjonen til bildet til T (dvs. $\dim R(T)$). Er T en-til-en?