NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri

Faglig kontakt under prøven: Øyvind Solberg

Tlf: 99999999

Dato for prøven: 10. oktober 2023

Prøvetid (fra–til): 10:15-11:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 (Konteeksamen 2023, Oppgave 1)

a) Gitt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

og $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}$ som matrise og vektor over de reelle tallene $\mathbb{R}$. Løs ligningssystemet

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

over $\mathbb{R}$ dvs. løs det lineære ligningssystemet gitt ved

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -6 \\ 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 15 \\ -4x_1 - 2x_2 \phantom{{}+2x_3} &= -6 \end{aligned}$$

b) Finn en basis for kolonnerommet til matrisen A. Hva er rangen til matrisen A?

Oppgave 2 (Konteeksamen 2023, Oppgave 4)

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & a+2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

hvor a er et reelt tall. Beregn determinanten til A, og avgjør når matrisen A er invertbar.

b) La $B = I_3 + \mathbb{u}\mathbb{v}^T$, hvor I_3 er 3×3 identitetsmatrisen,

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbb{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

og hvor skalarproduktet mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er forskjellig fra -1, eller ekvivalent, matriseproduktet

$$\mathbb{v}^T \mathbb{u} \neq -1.$$

Vis at B er invertbar og at $B^{-1} = I_3 - c\mathbb{u}\mathbb{v}^T$ med $c = \frac{1}{1+\mathbb{v}^T\mathbb{u}}$.

Hvis noen, mot formodning, skulle ha ekstra tid igjen, så kan dere bryne dere på følgende bonusoppgave.

Oppgave 3 (Konteeksamen 2023, Oppgave 5) I denne oppgaven er A en $m\times n$-matrise, $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ og $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Alle matriser og vektorer er over $\mathbb{R}$. Når vi skal løse et lineært ligningssystem

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b},$$

så radreduserer vi den tilhørende totalmatrisen for å få et trapperedusert lineært ligningssystem

$$A'\mathbb{x} = \mathbb{b}',$$

hvor $A' = E_t E_{t-1} \cdots E_2 E_1 A$ for elementære matriser E_i med $i = 1, 2, \ldots, t$. Anta at rangen til A er lik s. Finn for hvilke $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^m$ det lineære ligningssystemet

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

er løsbart uttrykt ved hjelp av de elementære matrisene $\{E_i\}_{i=1}^t$.